

Mathematisches Institut
der
Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

Zulassungsarbeit zur ersten Staatsprüfung
für das Lehramt an Gymnasien

Didaktik der Mathematik

Dozentin: Prof. Dr. Judita Cofman

Catalan-Zahlen

Verfasser: Jürgen Schmidhammer
Erlangen, im Februar 1996



1.1.2.5.14.42.132.429.1430.
4862.16796.58786.208012.
742900.2674440.9694845.
35357670.129644790.4776
38700.1767263190.6564120
420.24466267020.914825
63640.343059613650.1289
904147324.4861946401452

Inhaltsverzeichnis

Titelseiten	
Inhaltsverzeichnis	
Einleitung	5
1 Einführung der Catalan-Zahlen	6
2 Interpretationen der Catalan-Zahlen	9
2.1 Das Catalansche Problem	9
2.2 Eulers Problem der Polygonzerlegung	10
2.3 Minimale Gitterwege ohne Überschreiten der Winkelhalbierenden	11
2.4 Anzahl der Terme beim Ausmultiplizieren eines bestimmten Produkts	14
2.5 Entscheidungsbäume	15
2.6 Ebene Wurzelbäume	17
2.7 Trivalente ebene Wurzelbäume	19
2.8 Binäre Suchbäume	20
2.9 Sich nicht schneidende Verbindungen von $2n$ Punkten auf einem Kreis	22
2.10 Sich nicht schneidende Verbindungen von $2n$ Punkten auf einer Linie	23
2.11 Planare Reimschemata	25
2.12 Menschen verschiedener Größe in zwei Reihen	27
2.13 Vorwärts- und Rückwärtsschritte	28
2.14 Zahlensequenz, in der jede Zahl Teiler der Summe ihrer beiden Nachbarn ist	31
2.15 Flexagone	32
3 Eulers Formel zur Polygonzerlegung	37
4 Formeln für die Catalan-Zahlenfolge	40
5 Äquivalenz der Interpretationen der Catalan-Zahlen	47
5.1 2.1 \Leftrightarrow 2.2	47
5.2 2.2 \Leftrightarrow 2.5	49
5.3 2.1 \Leftrightarrow 2.5	50
5.4 2.5 \Leftrightarrow 2.8	52
5.5 2.5 \Leftrightarrow 2.7	54
5.6 2.7 \Leftrightarrow 2.6	55
5.7 2.6 \Leftrightarrow 2.9	57
5.8 2.9 \Leftrightarrow 2.10	58
5.9 2.10 \Leftrightarrow 2.11	59
5.10 2.10 \Rightarrow 2.12	61
5.11 2.12 \Leftrightarrow 2.13	62
5.12 2.13 \Leftrightarrow 2.9	63
5.13 2.6 \Leftrightarrow 2.13	64
5.14 2.5 \Leftrightarrow 2.13	65
5.15 2.3 \Leftrightarrow 2.13	66
5.16 2.3 \Leftrightarrow 2.4	67
5.17 2.13 \Leftrightarrow 2.14	69
5.18 2.2 \Leftrightarrow 2.15	71
5.19 Überblick für $n = 1, 2, 3, 4$	72

6	Verallgemeinerte Catalan-Zahlen	77
6.1	Das verallgemeinerte Catalansche Problem	79
6.2	Das verallgemeinerte Problem der Polygonzerlegung	82
6.3	Minimale Gitterwege mit Nebenbedingungen	82
6.4	Anzahl der Terme beim Ausmultiplizieren	86
6.5	Allgemeine Entscheidungsbäume	87
6.6	Ebene Wurzelbäume mit mehrfachen Ästen	88
6.7	$(k + 2)$ -valente ebene Wurzelbäume	89
6.8	$(k + 1)$ -näre Suchbäume	92
6.9	Sich nicht schneidende Verbindungen von $(k + 1)n$ Punkten auf einem Kreis	93
6.10	Sich nicht schneidende Verbindungen von $(k + 1)n$ Punkten auf einer Linie	94
6.11	Planare Reimschemata aus k -fachen Reimen	95
6.12	Vorwärts- und Rückwärtsschritte mit beweglicher Wand	95
7	Äquivalenz der verschiedenen Interpretationen der Catalan-Zahlen k-ten Grades	98
7.1	6.1 \Leftrightarrow 6.2	99
7.2	6.2 \Leftrightarrow 6.5	100
7.3	6.1 \Leftrightarrow 6.5	101
7.4	6.5 \Leftrightarrow 6.8	102
7.5	6.5 \Leftrightarrow 6.7	103
7.6	6.6 \Leftrightarrow 6.7	103
7.7	6.6 \Leftrightarrow 6.9	106
7.8	6.9 \Leftrightarrow 6.10	107
7.9	6.10 \Leftrightarrow 6.11	107
7.10	6.9 \Leftrightarrow 6.12	109
7.11	6.6 \Leftrightarrow 6.12	110
7.12	6.5 \Leftrightarrow 6.12	111
7.13	6.3 \Leftrightarrow 6.12	111
7.14	6.3 \Leftrightarrow 6.4	111
7.15	Überblick für $k = 2, 3, 4$	111
8	Ausblicke	120
8.1	Reine Catalan-Zahlen	120
8.2	Höhere Catalan-Zahlen	121
8.3	Mehrdimensionale Verallgemeinerung der Catalan-Zahlen	123
8.4	q -Catalan-Zahlen	125
9	Catalan-Zahlen in der Schule	128
	Literaturverzeichnis	130

Einleitung

Manche Erkenntnisse aus einem Teilgebiet der Mathematik haben oft unmittelbare Auswirkungen auf ein ganz anderes Gebiet und tragen manchmal sogar dazu bei, dieses besser und leichter zu verstehen. Durch Forschung an einem bestimmten mathematischen Thema stößt man oft auf ungeahnte Zusammenhänge, die eine ganz neue Sicht- und Denkweise ermöglichen, welche wiederum zu weiterem Forschen anregt.

Die Catalan-Zahlen stellen ein sehr gutes Beispiel dafür dar. Die Catalan-Zahlen - eine Zahlenfolge, die immer mehr an Bedeutung gewinnt - sind bei weitem nicht so bekannt wie die Fibonacci-Zahlen oder die Binomialzahlen, aber in ihrem Reichtum an Anwendungsmöglichkeiten sind sie diesen ebenbürtig.

Ausgehend von dem Polygonzerlegungsproblem Eulers werde ich in dieser Arbeit die Catalan-Zahlen definieren, ihre Berechnungsmöglichkeiten aufzeigen und vor allen Dingen versuchen anhand von 14 weiteren - zum Teil aus ganz Gebieten stammenden - Problemen, die alle die Catalan-Zahlenfolge als Lösung besitzen, ihre ungeheure Vielfalt zu demonstrieren.

Dem Leser soll ein möglichst großer Überblick über die Catalan-Zahlen und deren Anwendungen und den Beziehungen zwischen diesen verschiedensten Anwendungen gegeben werden.

Deswegen folgt im zweiten Teil der Arbeit eine Verallgemeinerung der Catalan-Zahlen. Wieder versuche ich die Vielfalt auch dieser Verallgemeinerung vorzustellen, indem ich die verschiedenen Interpretationen der Catalan-Zahlen verallgemeinere, soweit dies einfach möglich ist. Verschiedene Berechnungs- und Beweismöglichkeiten werden vorgestellt. Besonderen Wert lege ich dabei stets auf die Beziehungen zwischen den verschiedenen Interpretationen.

Um den Überblick zu vervollständigen, gebe ich auch noch weitere Verallgemeinerungen der Catalan-Zahlen aus der neueren mathematischen Forschung an, um damit den Leser zum Weiterforschen anzuregen.

Am Schluß widme ich mich noch der Didaktik der Catalan-Zahlen.

Mein Bestreben beim Erstellen der Arbeit war es vor allen Dingen, so leicht verständlich wie möglich und anhand von sehr vielen nachvollziehbaren Beispielen zu erklären. Ich habe bewußt viele Zeichnungen eingefügt, um die Sachverhalte besser zu veranschaulichen und vor allen Dingen um die Arbeit interessanter, abwechslungsreicher und übersichtlicher zu gestalten.

Und nun viel Vergnügen mit den Catalan-Zahlen!

1 Einführung der Catalan-Zahlen

Im Jahre 1751 stellte LEONHARD EULER dem Mathematiker CHRISTIAN GOLDBACH folgende Aufgabe:

Auf wieviele Arten läßt sich ein (ebenes konvexes) n -Eck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen?

Diese Aufgabe erweckte damals sehr großes Interesse, weil sie trotz ihres relativ harmlosen Aussehens erhebliche Schwierigkeiten hervorruft, wenn wir versuchen, eine allgemeine Formel zur Antwort des Problems ohne weitere Hilfsmittel aufzustellen.

Für die einfachsten Fälle $n = 3, 4, 5, 6$ erhalten wir eine Lösung leicht durch zeichnerische Darstellung (siehe Abbildung 1):

$$E_3 = 1, \quad E_4 = 2, \quad E_5 = 5, \quad E_6 = 14$$

wobei E_n die Anzahl der möglichen Zerlegungen eines n -Ecks ist ($n \geq 3$ mit $n \in \mathbb{N}$).

Mit zunehmender Eckenzahl n wird dieses zeichnerische Verfahren aber bald unausführbar.

EULER entwickelte für E_n folgende Formel:

$$E_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n - 10)}{(n - 1)!} \quad (1)$$

”Die Induktion, die ich gebraucht, war ziemlich mühsam” sagte EULER selbst über seine Lösung (nach [1]).

Somit erhalten wir folgende Zerlegungszahlenfolge:

$$\begin{aligned} E_3 &= 1 \\ E_4 &= 2 \\ E_5 &= 5 \\ E_6 &= 14 \\ E_7 &= 42 \\ E_8 &= 132 \\ E_9 &= 429 \\ E_{10} &= 1430 \\ E_{11} &= 4862 \\ E_{12} &= 16796 \\ E_{13} &= 58786 \\ E_{14} &= 208012 \\ E_{15} &= 742900 \\ E_{16} &= 2674440 \\ E_{17} &= 9694845 \\ E_{18} &= 35357670 \\ E_{19} &= 129644790 \\ E_{20} &= 477638700 \\ E_{21} &= 1767263190 \\ E_{22} &= 6564120420 \\ E_{23} &= 24466267020 \\ E_{24} &= 91482563640 \\ &\dots \end{aligned}$$

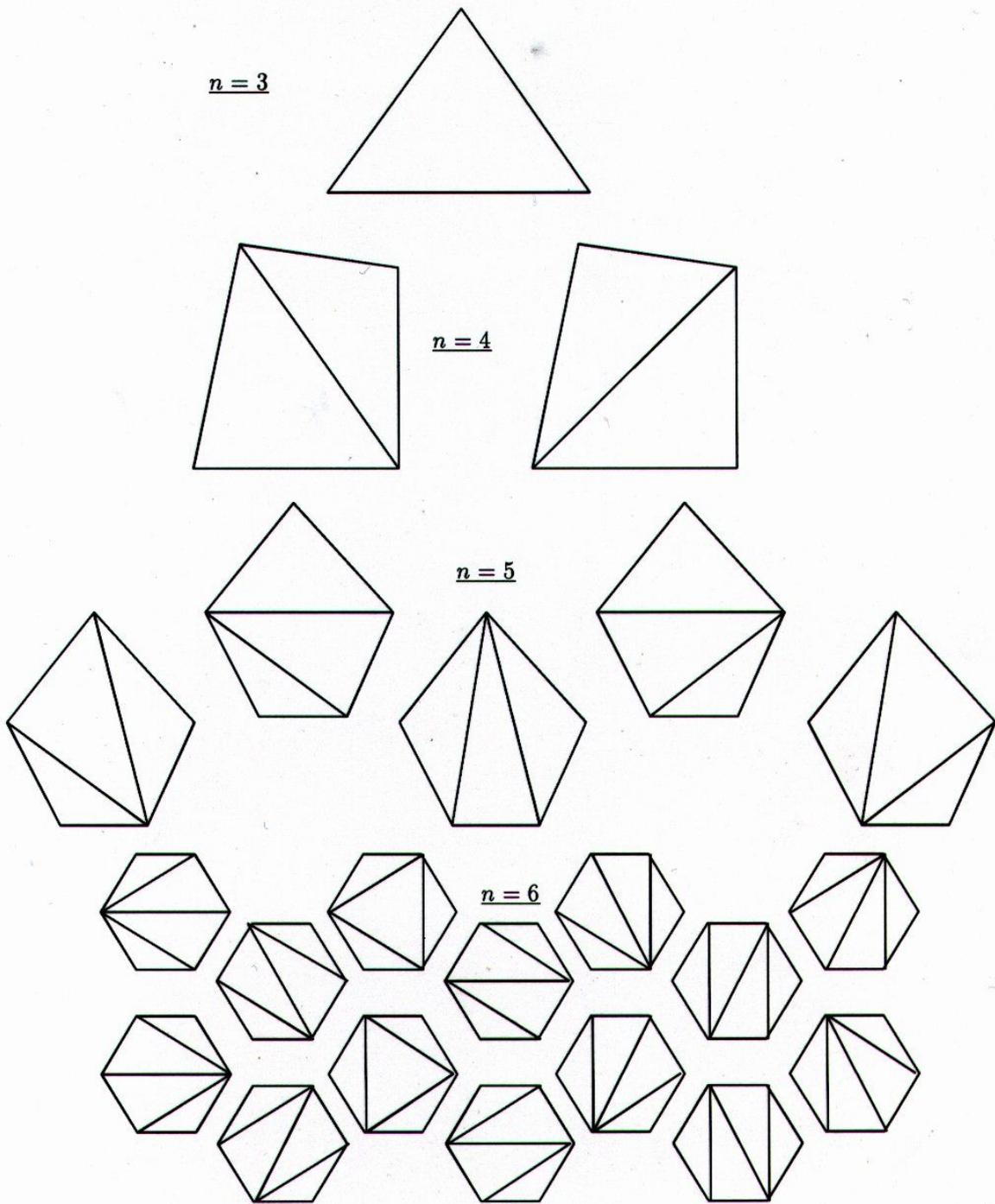


Abbildung 1: zeichnerische Darstellung der Fälle $n = 3, 4, 5, 6$ der Polygonzerlegung in Dreiecke

Obwohl EULER diese Zahlenfolge schon Mitte des 18. Jahrhunderts entdeckt hat, wurde sie nach dem belgischen Mathematiker EUGÈNE CHARLES CATALAN benannt, der von 1814 bis 1894 gelebt hat (Genauerer zu Leben und Werk Catalans siehe *Les travaux mathématiques de Eugène-Charles Catalan*, Annuaire de L'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, Brüssel (1896), Seite 115-172).



Abbildung 2: E.C. CATALAN

Diese **Catalan-Zahlen** lassen sehr viele Interpretationen zu und spielen in Abzählproblemen eine ähnlich wichtige Rolle wie die Binomialzahlen oder die Fibonacci-Zahlen. Im folgenden möchte ich die Catalan-Zahlenfolge mit $(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bezeichnen, wobei ich definiere:

$$C_0 := 1 \quad \text{und} \quad C_n := E_{n+2} \quad \text{für} \quad n \geq 1 \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

Ich befasse mich in meiner Arbeit zuerst mit den verschiedenen Interpretationsmöglichkeiten der Catalan-Zahlen:

2 Interpretationen der Catalan-Zahlen

Ich möchte hier nun fünfzehn verschiedene Problemstellungen vorstellen, die - wie sich herausstellen wird - alle die gleiche Lösung besitzen, nämlich die Catalan-Zahlenfolge.

Es sei $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

2.1 Das Catalansche Problem

Im Jahre 1838 behandelte E.C. CATALAN im Journal de Mathématiques [3] folgende Aufgabe:

Auf wieviele Arten läßt sich ein Produkt aus $(n + 1)$ verschiedenen Faktoren paarig (d.h. zu Paaren geklammert) berechnen, wenn die Reihenfolge der Faktoren festgelegt ist?

Für die ersten vier Fälle erhalten wir die Lösungen leicht:

- $n = 1$: \implies 2 Faktoren a, b :

(ab)

Es ist offensichtlich, daß es hier nur diese 1 Möglichkeit gibt.

- $n = 2$: \implies 3 Faktoren a, b, c :

$(ab)c \quad a(bc)$

Hier gibt es nur diese 2 Möglichkeiten.

- $n = 3$: \implies 4 Faktoren a, b, c, d :

$(ab)(cd) \quad [(ab)c]d \quad [a(bc)]d \quad a[(bc)d] \quad a[b(cd)]$

Hier gibt es also diese 5 Möglichkeiten.

- $n = 4$: \implies 5 Faktoren a, b, c, d, e :

$[(ab)(cd)]e \quad \{[(ab)c]d\}e \quad \{[a(bc)]d\}e \quad \{a[(bc)d]\}e \quad \{a[b(cd)]\}e$
 $a[(bc)(de)] \quad a\{[(bc)d]e\} \quad a\{[b(cd)]e\} \quad a\{b[(cd)e]\} \quad a\{b[c(de)]\}$
 $(ab)[c(de)] \quad (ab)[(cd)e] \quad [(ab)c](de) \quad [a(bc)](de)$

Bei näherer Betrachtung erkennen wir, daß es nur diese 14 Möglichkeiten gibt.

Wir sehen also bereits die Übereinstimmung der Lösungen dieser ersten vier Fälle mit den ersten vier Catalan-Zahlen C_1 bis C_4 . Eine weitergehende Untersuchung des Catalanschen Problems führt tatsächlich auf die Catalan-Zahlenfolge (Beweis siehe Kapitel 3 und 5.1), weshalb sie auch diesen ihren Namen bekommen hat.

Das Catalansche Problem läßt sich auch etwas umformulieren, wodurch es wieder einen neuen Gehalt bekommt:

In einer nicht assoziativen und nicht kommutativen Algebra ist es nötig, verschiedene Interpretationen von x^n zu unterscheiden. So gilt dort z.B. für x^3 :

$$x^3 = x \cdot x^2 \quad \text{oder} \quad x^3 = x^2 \cdot x.$$

Dies wirft folgende Frage auf:

Wieviele verschiedene Interpretationen von x^{n+1} gibt es in einer nicht assoziativen und gleichzeitig nicht kommutativen Algebra?

Die einfachsten Fälle sind:

- $n = 1$: $x^2 = (xx)$
- $n = 2$:
 $x^3 = (xx)x \quad x^3 = x(xx)$
- $n = 3$:
 $x^4 = (xx)(xx) \quad x^4 = [(xx)x]x \quad x^4 = [x(xx)]x \quad x^4 = x[(xx)x] \quad x^4 = x[x(xx)]$
- $n = 4$: Für x^5 gibt es folgende 14 Interpretationen:

$[(xx)(xx)]x$	$\{[(xx)x]x\}x$	$\{[x(xx)]x\}x$	$\{x[(xx)x]\}x$	$\{x[x(xx)]\}x$
$x[(xx)(xx)]$	$x\{[(xx)x]x\}$	$x\{[x(xx)]x\}$	$x\{x[(xx)x]\}$	$x\{x[x(xx)]\}$
$(xx)[x(xx)]$	$(xx)[(xx)x]$	$[(xx)x](xx)$	$[x(xx)](xx)$	

Die Klammerung erfolgt also völlig analog zum obigen Beispiel.

2.2 Eulers Problem der Polygonzerlegung

Eulers Problem aus dem Jahre 1751 kennen wir ja schon aus der Einführung:

Auf wieviele Arten läßt sich ein ebenes, konvexes $(n + 2)$ -Eck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen?

Die Lösung dieser Frage habe ich in der Einführung mit Hilfe der Formel von Euler (Beweis siehe Kapitel 3) als Catalan-Zahlenfolge definiert.

2.3 Minimale Gitterwege ohne Überschreiten der Winkelhalbierenden

In der Kombinatorik tauchen oft Probleme auf, die mit der Frage nach der Anzahl der Gitterwege in einem ebenen Gitter zu tun haben.

Ein beliebiges ebenes Gitter hat folgendes Aussehen:

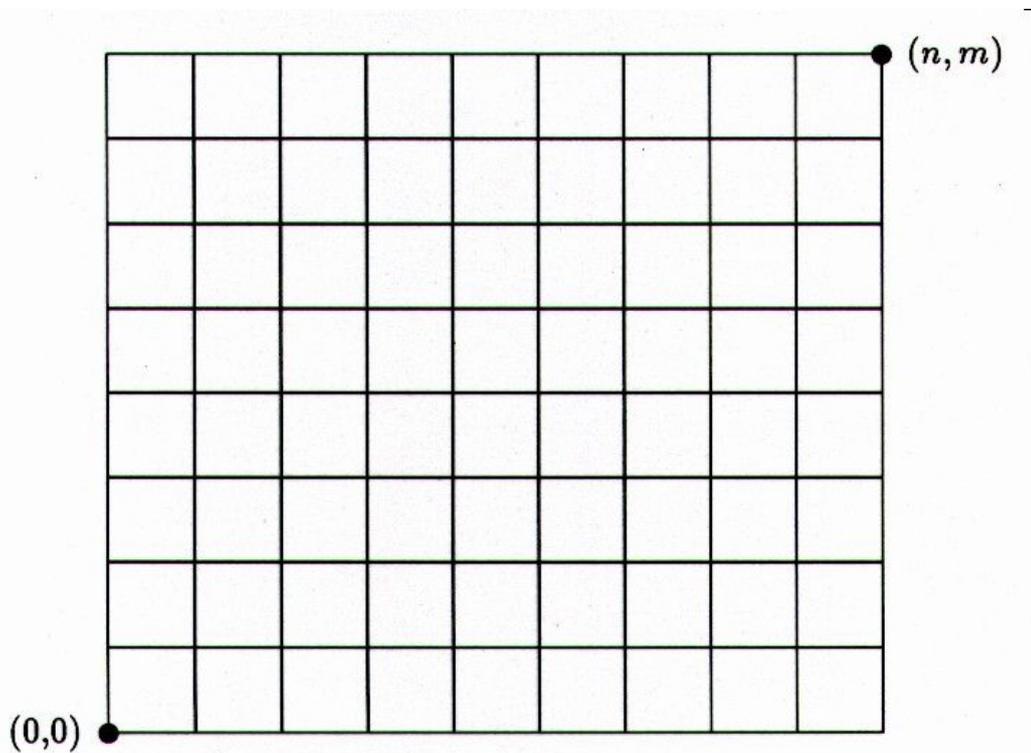


Abbildung 3: ebenes Gitter

Wir betrachten die Gitterwege minimaler Länge vom Startpunkt $(0,0)$ zum beliebigen Endpunkt (n,m) , wobei $n, m \in \mathbb{N}_0$. Alle solchen Wege bestehen aus n horizontalen und m vertikalen Schritten auf den Gitterlinien zum nächsten Gitterpunkt. Diagonalschritte seien verboten.

Jeder minimaler Gitterweg hat also eine Länge $n + m$ Schritten.

An jedem Verzweigungspunkt haben wir nur die zwei Möglichkeiten, entweder nach oben (o) oder nach rechts (r) zu gehen.

Deshalb läßt sich jeder minimale Gitterweg als $(n + m)$ -Tupel mit jeweils n Einträgen "r" und m Einträgen "o" darstellen.

Jeder minimale Gitterweg entspricht deshalb einer Permutation mit Wiederholung vom Typ (n, m) über der Grundmenge $A = \{r, o\}$.

Die Anzahl dieser Permutationen und somit die Anzahl der minimalen Gitterwege ist also:

$$B(n, m) := \frac{(n + m)!}{n! \cdot m!} = \binom{n + m}{n} = \binom{n + m}{m} \quad (3)$$

Eine systematische Anordnung dieser Binomialkoeffizienten $\binom{n+m}{m}$ ist bekanntermaßen das Pascalsche Dreieck:

					1						
					1	1					
				1	2	1					
			1	3	3	1					
			1	4	6	4	1				
			1	5	10	10	5	1			
			1	6	15	20	15	6	1		
			1	7	21	35	35	21	7	1	
			1	8	28	56	70	56	28	8	1
										

Wenn wir nun das Pascalsche Dreieck "drehen", so daß es genau in unser ebenes Gitter (Abbildung 3) "paßt", erhalten wir für jeden Punkt im Gitter die Anzahl der möglichen minimalen Gitterwege von $(0, 0)$ zu diesem Punkt (siehe Abbildung 4).

Wir erkennen sofort - genauso wie beim Pascalschen Dreieck, daß sich diese Anzahlen symmetrisch zur Winkelhalbierenden des Gitters (d.h. die Gerade durch $(0, 0)$ und $(1, 1)$) ergeben.

Außerdem erhalten wir die Anzahl der Gitterwege zu einem bestimmten Punkt einfach durch Addition der Anzahl für den direkt darunterliegenden Punkt und der Anzahl für den links benachbarten Punkt.

Fordern wir nun zusätzlich, daß die Gitterwege die Winkelhalbierende nicht überschreiten dürfen, dann sieht diese Situation wie in Abbildung 5 aus.

Uns interessieren nun im folgenden in erster Linie die Anzahlen der minimalen Gitterwege zu den Punkten auf der Winkelhalbierenden.

Es scheint sich hier wieder die Catalan-Zahlenfolge zu ergeben. Dies ist tatsächlich der Fall (Beweis siehe 5.15).

Statt von der Winkelhalbierenden zu sprechen, können wir auch einfach ihre Geradengleichung angeben: $y = x$

Somit wollen wir also folgendes Problem betrachten:

Wieviele minimale Gitterwege vom Punkt $(0, 0)$ zum Punkt (n, n) , welche die Gerade $g : y = x$ nicht überschreiten, gibt es ?

Diese Problemstellung läßt sich auch ganz leicht etwas anders formulieren:

Stellen wir uns vor, wir hätten zwei Spieler A und B, die zusammen irgendein beliebiges Spiel des öfteren hintereinander durchführen und pro Spiel einen Punkt an den Gewinner vergeben. Der Verlierer erhält keinen Punkt.

Nach $2n$ Spielen steht es unentschieden: Spieler A hat n Punkte und Spieler B hat auch n Punkte.

Eine völlig äquivalente Fragestellung zu unserem obigen Problem der Gitterwege, die die Winkelhalbierende nicht überschreiten ist nun die folgende Frage:

Wieviele Möglichkeiten des Verlaufs der $2n$ Spiele gibt es, so daß Spieler A zu jeder Zeit nicht weniger Punkte als Spieler B hatte?

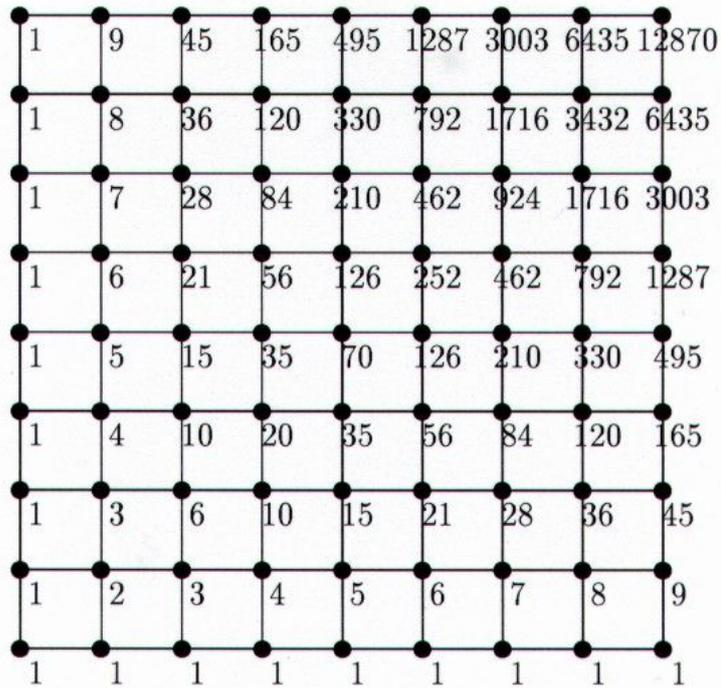


Abbildung 4: ebenes Gitter mit Angabe der Anzahl der minimalen Gitterwege von $(0,0)$ zu jedem Punkt des Gitters

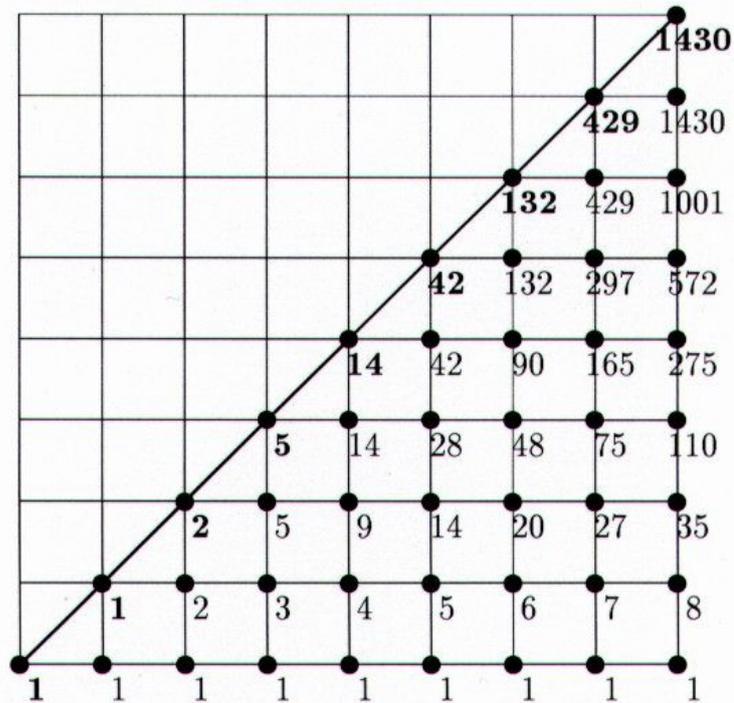


Abbildung 5: ebenes Gitter mit Angabe der Anzahl der minimalen Gitterwege, die die Winkelhalbierende nicht überschreiten

2.4 Anzahl der Terme beim Ausmultiplizieren eines bestimmten Produkts

Wir betrachten das Produkt

$$x_1(x_1 + x_2)(x_1 + x_2 + x_3) \cdot \dots \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

und stellen uns die Frage:

Wieviele verschiedene Terme entstehen beim Ausmultiplizieren dieses Produkts?

Die Fälle $n = 1, 2, 3, 4$ sind natürlich leicht durch Ausmultiplizieren zu beantworten:

- $n = 1$:

$$x_1 = x_1$$

1 Term

- $n = 2$:

$$x_1(x_1 + x_2) = x_1^2 + x_1x_2$$

2 Terme

- $n = 3$:

$$\begin{aligned} x_1(x_1 + x_2)(x_1 + x_2 + x_3) &= (x_1^2 + x_1x_2)(x_1 + x_2 + x_3) = \\ &= x_1^3 + 2x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

5 Terme

- $n = 4$:

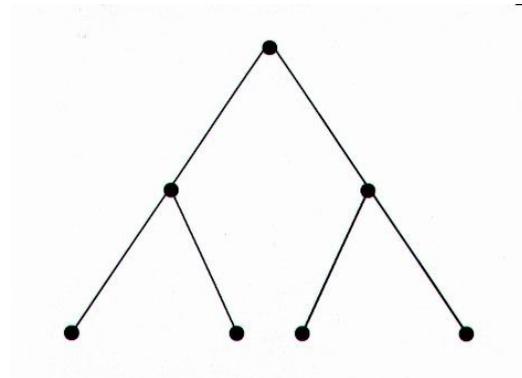
$$\begin{aligned} x_1(x_1 + x_2)(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) &= \\ &= x_1^4 + 3x_1^3x_2 + 2x_1^3x_3 + x_1^3x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 4x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_3^2 + 2x_1^2x_2x_4 + x_1^2x_3x_4 + x_1x_2^3 + \\ &+ 2x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2 + x_1x_2^2x_4 + x_1x_2x_3x_4 \end{aligned}$$

Dies sind 14 verschiedene Terme.

Als Antwort auf unsere Frage drängt sich also wieder die Catalan-Zahlenfolge auf, welche auch zutrifft (Beweis siehe 5.16).

2.5 Entscheidungsbäume

Aus der Stochastik kennen wir Baumdiagramme oder Entscheidungsbäume, wie ich sie hier nennen will:



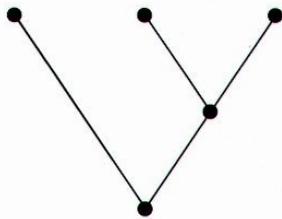
So ein Entscheidungsbaum besteht aus einem Ausgangspunkt, von dem Äste weggehen und Knotenpunkten, von denen weitere Äste ausgehen.

Bei einem bestimmten Entscheidungsbaum sollen immer die gleiche Anzahl von n Ästen sowohl vom Ausgangspunkt als auch von jedem Knotenpunkt ausgehen.

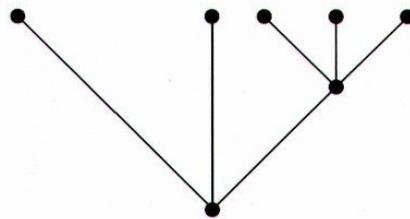
Diese Anzahl wollen wir Grad der Entscheidungsbaume nennen.

Als weitere Information, um einen Entscheidungsbaum näher beschreiben zu können, müssen wir noch die Anzahl der Endpunkte des Entscheidungsbaumes angeben.

So ist zum Beispiel



ein Entscheidungsbaum
2.Grades mit
3 Endpunkten und



ein Entscheidungsbaum
3.Grades mit
5 Endpunkten

Uns interessiere nun folgende Frage:

Wieviele Entscheidungsbäume 2.Grades mit $n + 1$ Endpunkten gibt es ?

Für $n = 1, 2, 3$ erhalten wir die Möglichkeiten:

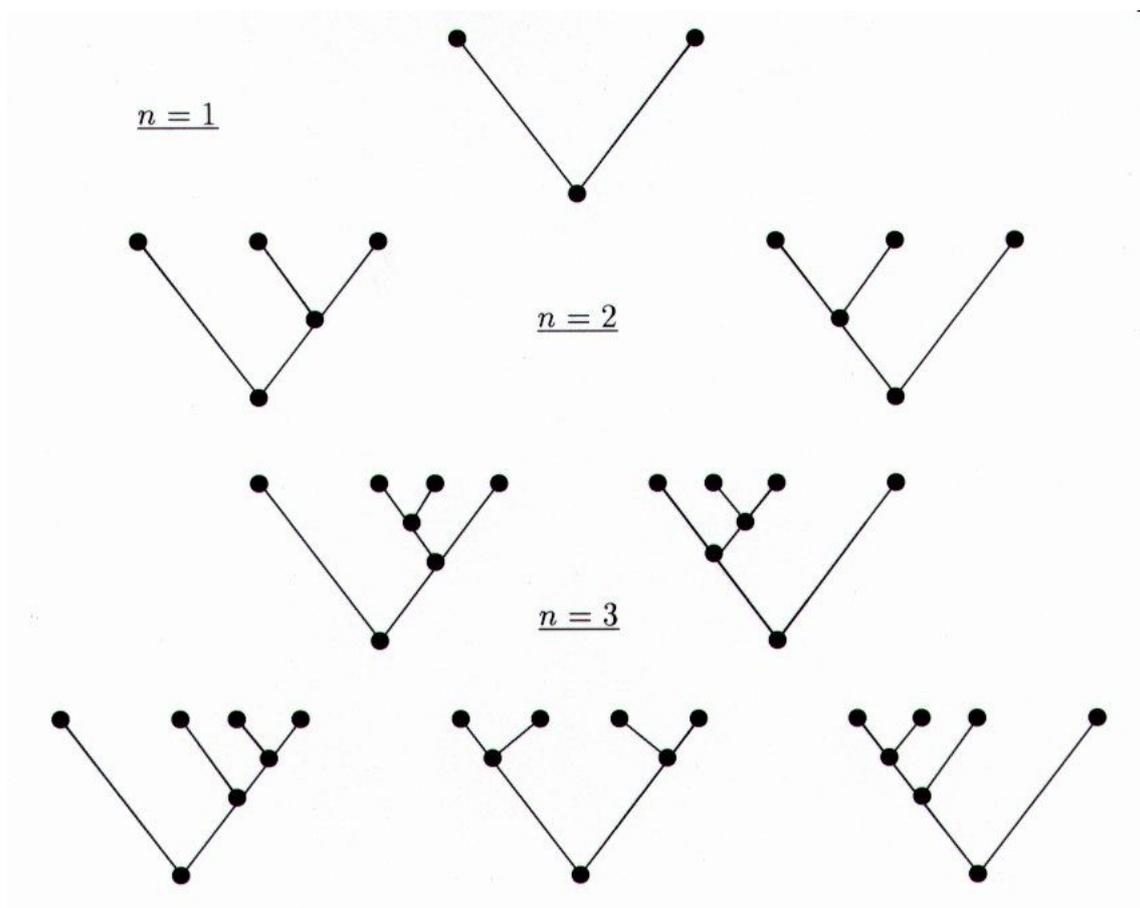


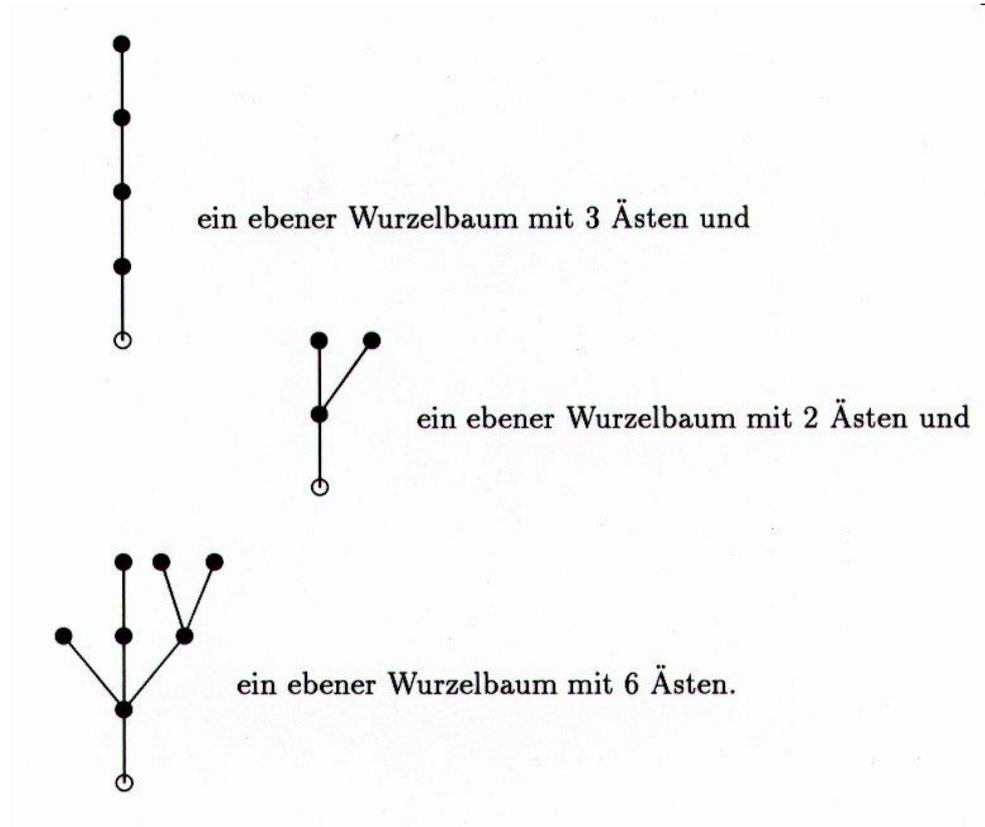
Abbildung 6: Entscheidungsbäume 2.Grades mit $n + 1 = 2, 3, 4$ Endpunkten

Es scheint sich also wieder die Catalan-Zahlenfolge zu ergeben. Diese Vermutung erhärtet sich bei Betrachtung der darauffolgenden Fälle $n = 4, 5, \dots$, welche ich hier jetzt nicht abgebildet habe, da es ab $n = 4$ doch immer schwieriger wird die Übersicht zu behalten. Eine zeichnerische Übersicht (siehe 5.19) wird ebenso noch folgen, wie ein Beweis der Tatsache, daß hier wieder die Catalan-Zahlen die Lösung unserer Fragestellung sind (siehe 5.2).

2.6 Ebene Wurzelbäume

Ebene Wurzelbäume unterscheiden sich von den Entscheidungsbäumen, die wir zuvor behandelt haben durch die "Wurzel", die zum Ausgangspunkt hinführt. Außerdem soll nun innerhalb eines Baumes der Verzweigungsgrad nicht mehr festgelegt sein, sondern beliebig wechseln. Somit fällt dieses charakteristische Merkmal also weg. Wir beziehen uns daher einfach auf die Anzahl der Äste ohne die Wurzel mit zu zählen.

Zum Beispiel ist



Wir stellen uns die Frage:

Wieviele ebene Wurzelbäume mit n Ästen gibt es ?

Für $n = 1, 2, 3$ ist die Antwort ersichtlich leicht:

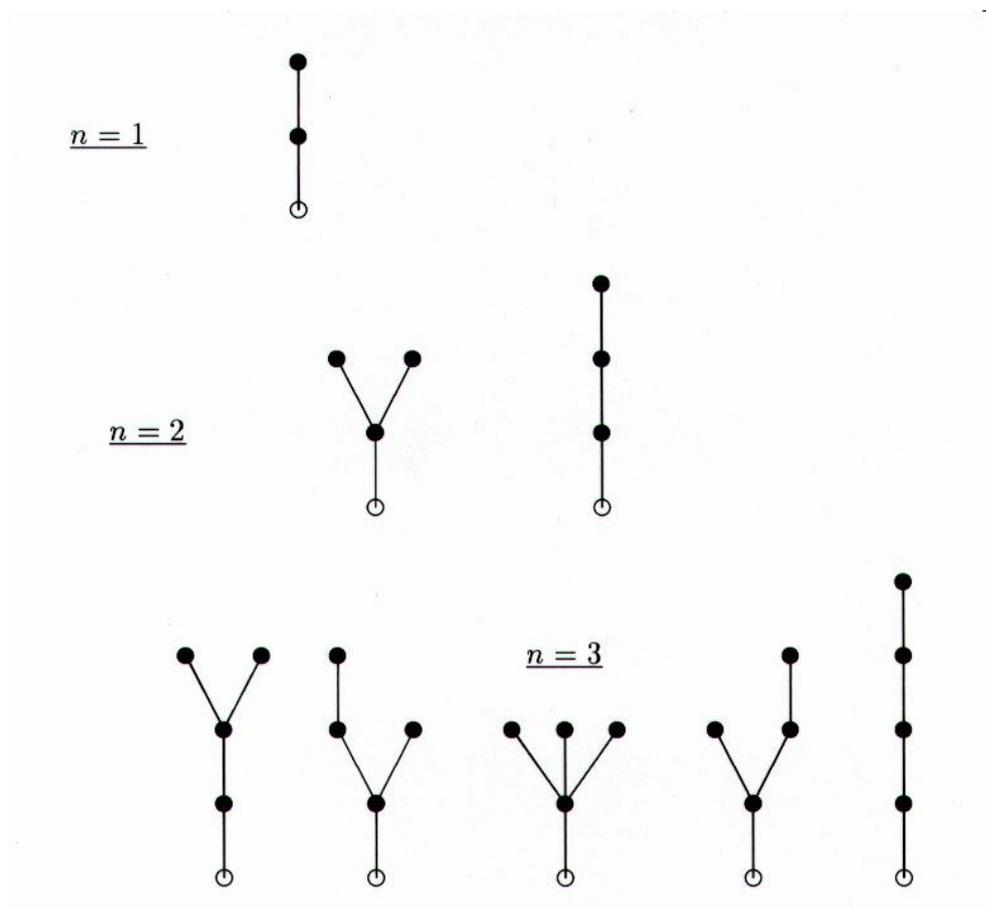


Abbildung 7: Ebene Wurzelbäume mit $n = 1, 2, 3$ Ästen.

Die Catalan-Zahlenfolge beschreibt auch diese Anzahl (Beweis siehe 5.6).

2.7 Trivalente ebene Wurzelbäume

Trivalente ebene Wurzelbäume sind dadurch gekennzeichnet, daß zu jedem Verzweigungspunkt genau 3 Äste führen. Die Anzahl der Verzweigungspunkte (der Wurzepunkt sei ausgenommen) charakterisiert somit auch einen trivalenten ebenen Wurzelbaum.

Uns interessiert:

Wieviele trivalente ebene Wurzelbäume mit n Verzweigungspunkten gibt es ?

Für $n = 1, 2, 3$ erhalten wir die Möglichkeiten:

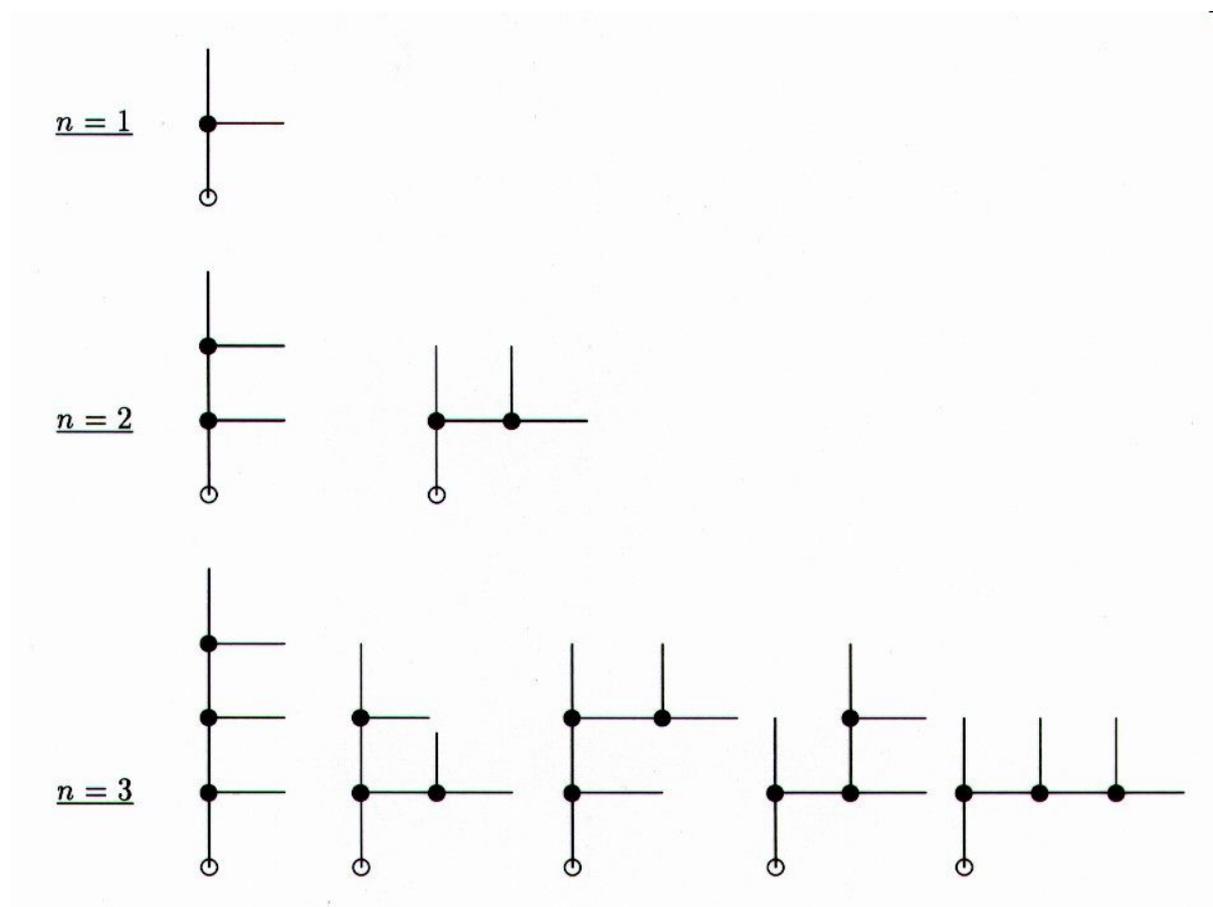


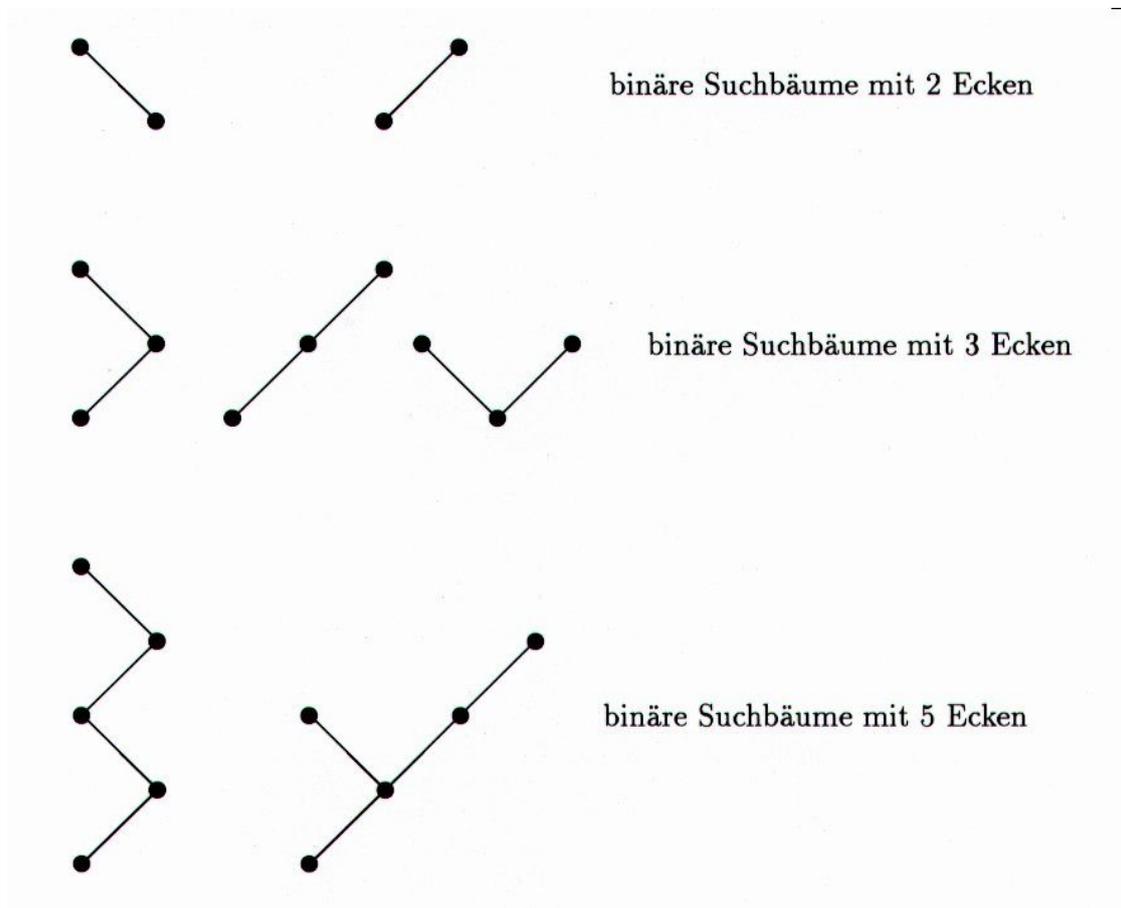
Abbildung 8: Trivalente ebene Wurzelbäume mit $n = 1, 2, 3$ Verzweigungspunkten.

Beim Durchzählen stoßen wir wieder auf die ersten drei Catalan-Zahlen, welche die Antwort auf diese Frage darstellen (Beweis siehe 5.5).

2.8 Binäre Suchbäume

Binäre Suchbäume mit n Ecken seien Bäume mit einem Ausgangspunkt, $n-1$ Verzweigungspunkten und $n-1$ Ästen, für die höchstens zwei mögliche Verzweigungsrichtungen zur Verfügung stehen.

So sind zum Beispiel



Wieder interessieren uns:

Wieviele binäre Suchbäume mit n Ecken gibt es ?

Für $n = 1, 2, 3, 4$ erhalten wir folgende Bäume:

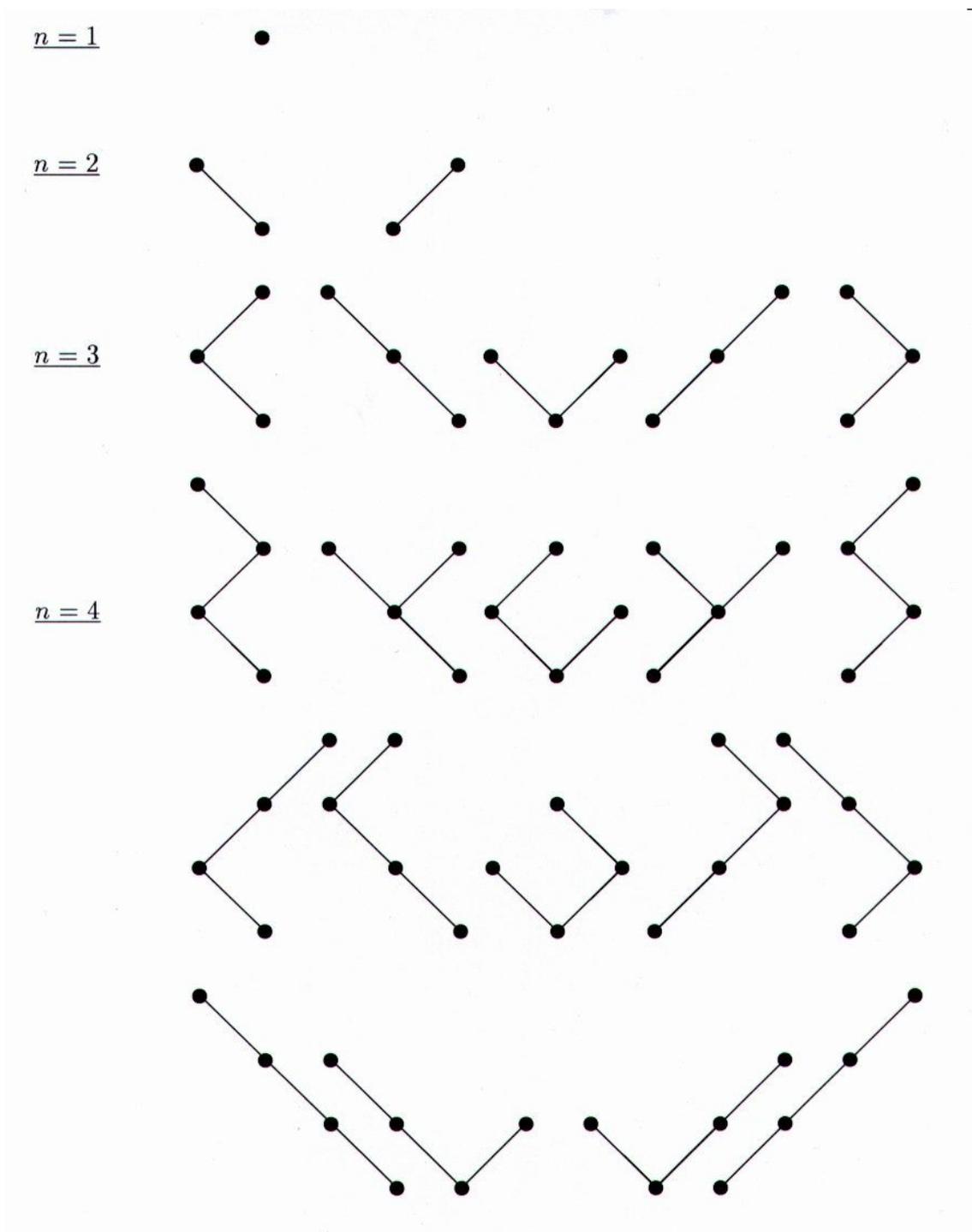


Abbildung 9: binäre Suchbäume mit $n = 1, 2, 3, 4$ Ecken

Beim Abzählen der binären Suchbäume für die jeweiligen Fälle drängt sich uns der Verdacht auf, die Anzahl dieser Bäume sei wieder durch die Catalan-Zahlenfolge gegeben, was tatsächlich stimmt (Beweis siehe 5.4).

2.9 Sich nicht schneidende Verbindungen von $2n$ Punkten auf einem Kreis

Nun wollen wir uns die folgende Frage stellen:

Wieviele Möglichkeiten gibt es, $2n$ Punkte auf einer Kreislinie so paarweise innerhalb des Kreises zu verbinden, daß sich die Verbindungsgeraden nicht schneiden?

Auf diese Weise ergibt sich eine Zerlegung der Kreisfläche in $n + 1$ Teilflächen.

Wieder erhalten wir die Antwort für die ersten Fälle leicht aus der zeichnerischen Darstellung dieses Problems:

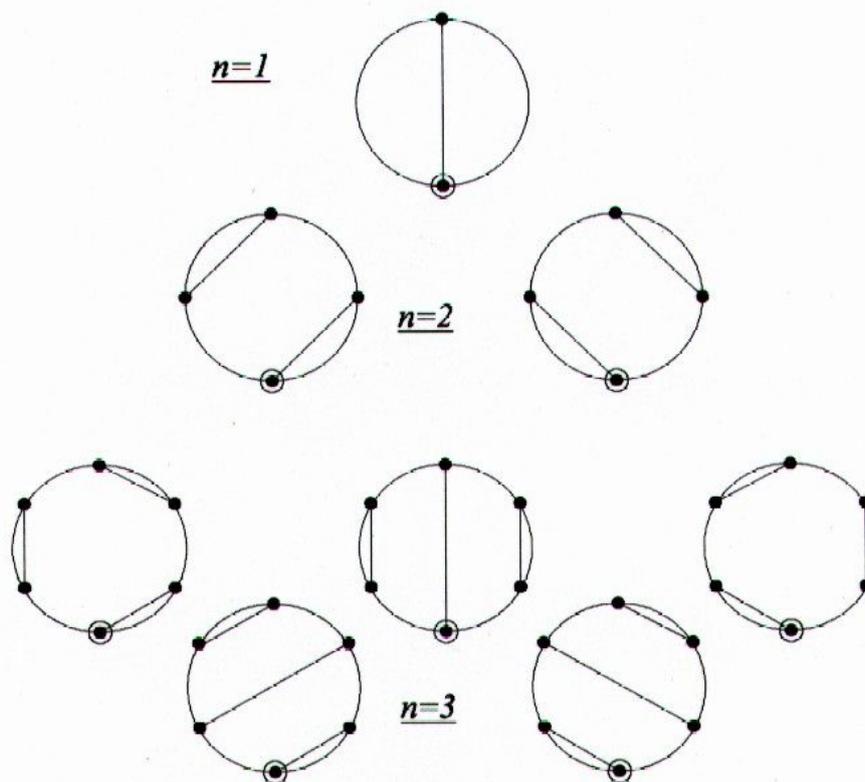


Abbildung 10: $2n$ Punkte auf einer Kreislinie paarweise nicht-schneidend verbunden für $n = 1, 2, 3$.

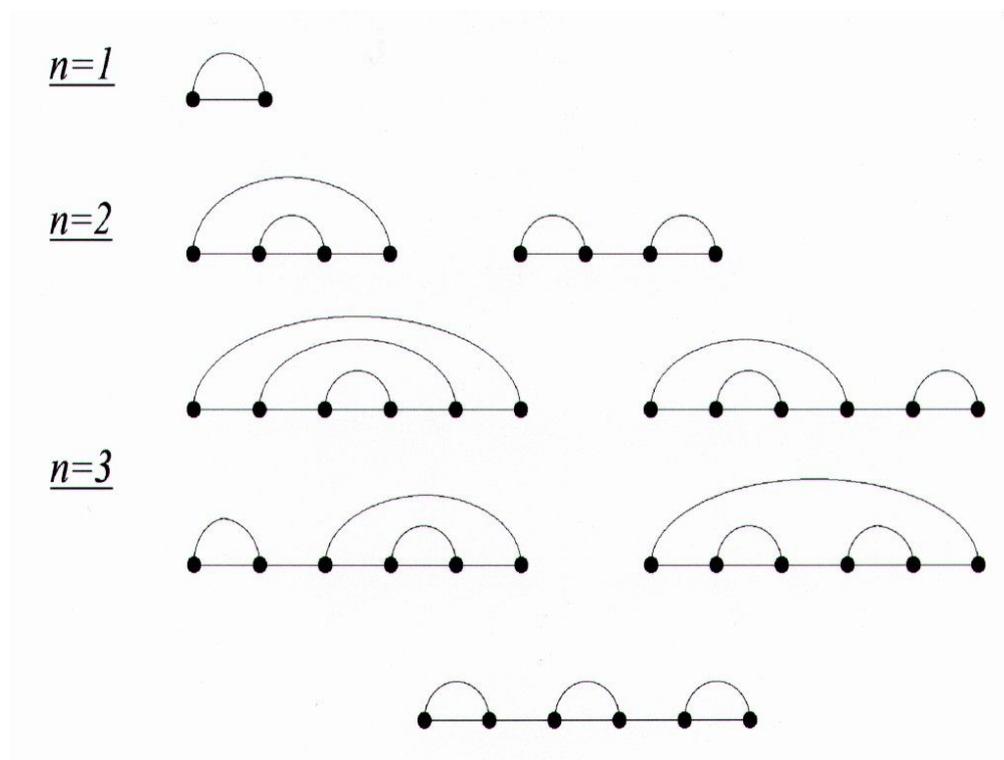
Zur Orientierung ist ein beliebig festgelegter Punkt besonders gekennzeichnet. Die Anzahl der Möglichkeiten scheint auch hier wieder die Catalan-Zahlenfolge zu ergeben; ein Verdacht, der sich durch weitere zeichnerische Untersuchung noch verstärkt und auch tatsächlich zutrifft (Beweis siehe 5.7).

2.10 Sich nicht schneidende Verbindungen von $2n$ Punkten auf einer Linie

Eine ähnliche Fragestellung ist die folgende:

Wieviele Möglichkeiten gibt es $2n$ Punkte auf einer Geraden so oberhalb der Geraden paarweise zu verbinden, daß sich die Verbindungslinien nicht kreuzen?

Die Antwort für $n = 1, 2, 3, 4$ ergibt sich zeichnerisch:



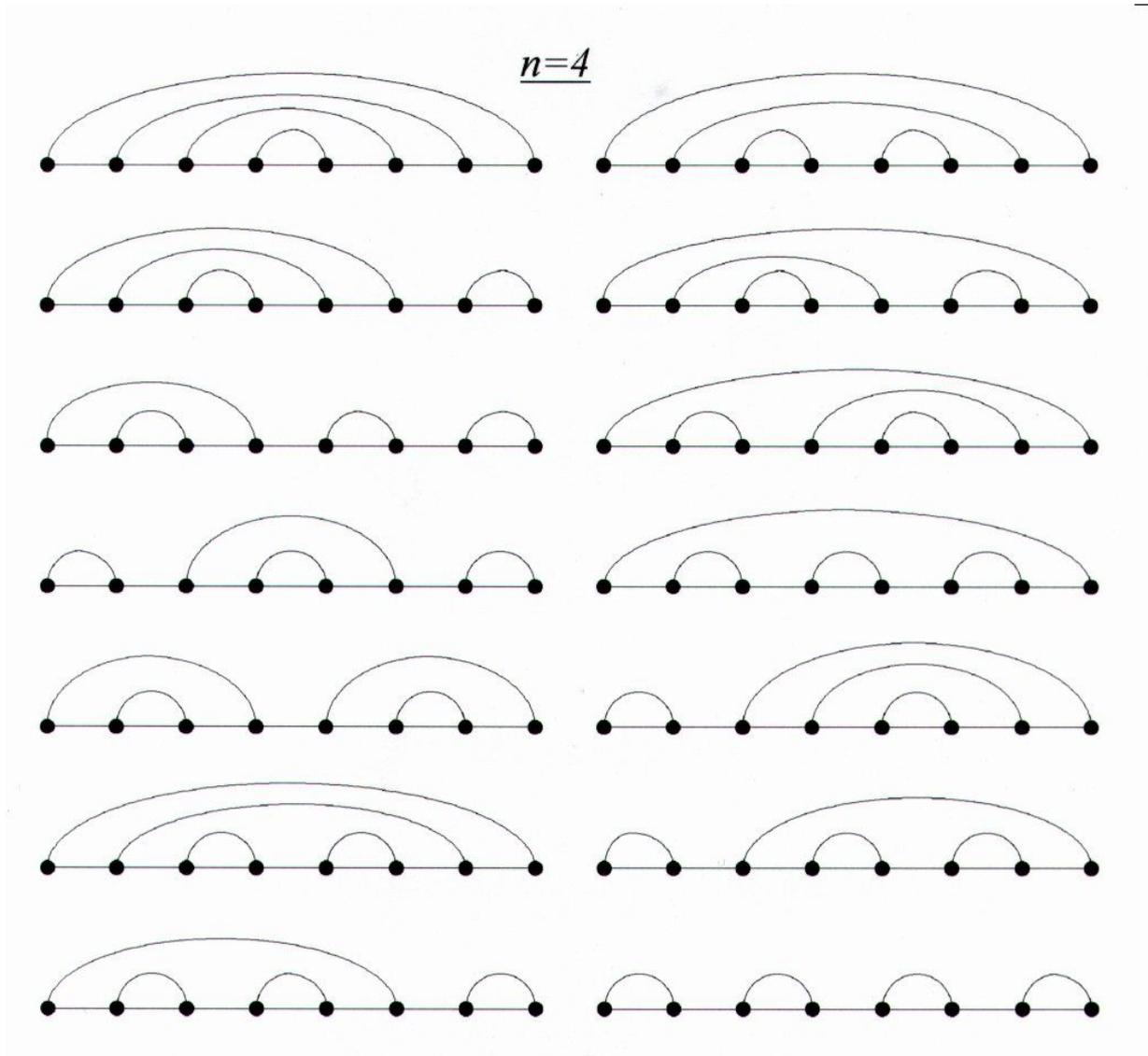


Abbildung 11: $2n$ Punkte auf einer Geraden paarweise oberhalb der Gerade nicht-schneidend verbunden für $n = 1, 2, 3, 4$.

Durch Abzählen erkennen wir wieder die ersten Glieder der Catalan-Zahlenfolge, welche sich tatsächlich ergibt (Beweis siehe 5.8).

2.11 Planare Reimschemata

Friedrich Schillers Meisterwerk "Das Lied von der Glocke" beginnt mit den Zeilen:

**Fest gemauert in der Erden
Steht die Form, aus Lehm gebrannt.
Heute muß die Glocke werden!
Frisch, Gesellen, seid zur Hand!**

**Von der Stirne heiß
Rinnen muß der Schweiß,
Soll das Werk den Meister loben;
Doch der Segen kommt von oben.**

Betrachten wir die Reimschemata dieser zwei Absätze:

In den ersten vier Zeilen liegt ein Reimschema **abab** vor, was auch als Kreuzreim bezeichnet wird.

In den darauffolgenden Zeilen ist das Reimschema **aabb**, was als Paarreim bezeichnet wird.

Lösen wir uns von den Fachbegriffen der Lyrik und betrachten Reimschemata etwas allgemeiner:

Nehmen wir an, wir hätten einen Vers mit n Zeilen. Uns interessieren alle möglichen Reimschemata in diesem Vers und vor allen Dingen ihre Anzahl. Dabei muß noch betont werden, daß es auch Schemata gibt, die sich nicht "reimen", aber trotzdem als Reimschema gelten.

Für $n = 1$ erhalten wir natürlich nur ein mögliches Schema:

a

Für $n = 2$ gibt es 2 Möglichkeiten:

aa ab

ba ist kein weiteres mögliches Reimschema, da **ba** dem Schema **ab** entspricht. Ein Reimschema kennzeichnet nur die Struktur des Verses.

Bei $n = 3$ ergeben sich 5 Reimschemata:

aaa aab aba abb abc

Für einen Vierzeiler ($n = 4$) erhalten wir 15 Möglichkeiten:

aaaa aaab aaba abaa abbb aabb abba abab aabc
 abac abca abbc abcb abcc abcd

Dieses Ergebnis mag manchen Leser erstaunen, falls er jetzt wieder mit der Catalan-Zahlenfolge als Ergebnis gerechnet hat.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß bei allen Untersuchungen in den vorangegangenen und in den folgenden Kapiteln Vorsicht geboten ist. Bei kombinatorischen Problemen dieser Art ist es leicht möglich voreilig auf eine bekannte Zahlenfolge als Ergebnis zu schließen, obwohl sich eigentlich eine andere nahverwandte Zahlenfolge ergibt.

Genau das ist hier der Fall. Leicht vergißt man hier die 15. Möglichkeit und schließt sofort wieder auf Catalan-Zahlen. Hier ergibt sich aber eine andere Zahlenfolge: die **”Bell-Zahlen”**, die nach ERIC TEMPLE BELL benannt sind, welcher sehr viel über diese Zahlen veröffentlicht hat:

1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, ...

(siehe SLOANES Handbook [2], Nr.585)

Bisher haben wir alle möglichen Reimschemata eines n -zeiligen Verses betrachtet. Jetzt wollen wir uns auf ”planare Reimschemata” konzentrieren:

Schillers Gedicht beginnt mit einem Kreuzreimschema **abab**. Genau diese Art ”sich kreuzender” Reime soll jetzt aber ausgeschlossen werden.

Übrig bleiben die Reimschemata, die wir als ”planare Reimschemata” bezeichnen wollen. Wieder interessiere uns:

Wie groß ist die Anzahl der möglichen verschiedenen planaren Reimschemata n -zeiliger Verse?

Die folgende Übersicht gibt die Antwort für $n = 1, 2, 3, 4$:

<u>$n = 1$:</u>	a				
<u>$n = 2$:</u>	aa	ab			
<u>$n = 3$:</u>	aaa	aab	aba	abb	abc
<u>$n = 4$:</u>	aaaa	aaab	aaba	abaa	abbc
	aabb	abba	aabc	abac	abca
	abbc	abcb	abcc	abcd	

Im Vergleich zu oben ändert sich erst ab $n = 4$ etwas. Dort taucht der erste mögliche Kreuzreim **abab** auf, der hier jetzt wegfällt, und somit gibt es für $n = 4$ nur 14 planare Reimschemata.

Es ergeben sich jetzt tatsächlich die Catalan-Zahlen als Antwort auf unsere Frage nach der Anzahl der planaren Reimschemata (Beweis siehe 5.9).

2.12 Menschen verschiedener Größe in zwei Reihen

Hierbei sei unser Problem:

Wieviele Möglichkeiten gibt es, $2n$ Menschen paarweise verschiedener Größe in 2 Reihen von je n Menschen so aufzustellen, daß sie in jeder der beiden Reihen der Größe nach geordnet (der Größte in einer Reihe stehe jeweils an erster Stelle) stehen, und daß jede Person in der ersten Reihe größer ist als die ihrer Position entsprechenden Person in der zweiten Reihe?

Um diese Frage leichter behandeln zu können, wollen wir die $2n$ Menschen so von 1 bis $2n$ der Größe entsprechend durchnummerieren, daß der Kleinste die "1" bekommt und schließlich der Größte die Nummer " $2n$ ".

Somit haben wir das Problem also auf natürliche Zahlen umformuliert. Selbstverständlich ließe sich dieses Problem auf jede andere geordnete Menge paarweise verschiedener Elemente umformulieren.

Wir erhalten leicht für:

- $n = 1$:

1.Reihe:	2
2.Reihe:	1

1 Möglichkeit.

- $n = 2$:

4	3
2	1

4	2
3	1

Hier gibt es nur diese 2 Möglichkeiten.

- $n = 3$:

6	5	4
3	2	1

6	5	3
4	2	1

6	5	2
4	3	1

6	4	3
5	2	1

6	4	2
5	3	1

Dies sind alle 5 Möglichkeiten.

- $n = 4$:

8	7	6	5
4	3	2	1

8	7	6	4
5	3	2	1

8	7	6	3
5	4	2	1

8	7	6	2
5	4	3	1

8	7	5	4
6	3	2	1

8	7	5	3
6	4	2	1

8	7	5	2
6	4	3	1

8	7	4	3
6	5	2	1

8	7	4	2
6	5	3	1

8	6	5	4
7	3	2	1

8	6	5	3
7	4	2	1

8	6	5	2
7	4	3	1

8	6	4	3
7	5	2	1

8	6	4	2
7	5	3	1

Bei näherer Betrachtung erkennen wir, daß es in diesem Fall nur diese 14 Möglichkeiten gibt.

Es ergibt sich wiederum die Catalan-Zahlenfolge (Beweis siehe 5.11).

2.13 Vorwärts- und Rückwärtsschritte

Wir stellen uns vor, wir stünden mit dem Rücken an einer unüberwindbaren Mauer und sollten nach insgesamt $2n$ Vorwärts- und Rückwärtsschritten wieder so an der Mauer stehen. Wieviele verschiedene Schrittfolgen gibt es, um dieses Ziel zu erreichen?

Dieses Problem läßt sich wieder leicht umformulieren, indem wir eine Zahlensequenz mit $2n$ Einträgen betrachten:

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n}$, wobei gelten muß:

$$x_i = \pm 1 \quad , \quad \sum_{i=1}^{2n} x_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k x_i \geq 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq 2n$$

Somit lautet unsere Frage:

Wieviele verschiedene Sequenzen dieser Art gibt es ?

Für die einfachsten Fälle erhalten wir:

- $n = 1$: $1 - 1$

Es ist offensichtlich, daß es hier nur diese 1 Möglichkeit gibt.

- $n = 2$: $1 + 1 - 1 - 1$ und $1 - 1 + 1 - 1$

Hier gibt es nur diese 2 Möglichkeiten.

- $n = 3$:

$$1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 \quad 1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1 \quad 1 + 1 - 1 - 1 + 1 - 1$$

$$1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 \quad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$$

Dies sind alle 5 Möglichkeiten.

- $n = 4$:

$$1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 - 1 \quad 1 + 1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1 - 1$$

$$1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 - 1 - 1 \quad 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + 1 - 1$$

$$1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 \quad 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1$$

$$1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1 \quad 1 + 1 - 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$$

$$1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1 - 1 \quad 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1$$

$$1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1 \quad 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 - 1$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 \quad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$$

Bei genauerer Untersuchung erkennen wir, daß es in diesem Fall nur diese 14 Möglichkeiten gibt.

Durch eine zeichnerische Betrachtung wird diese Untersuchung etwas übersichtlicher:

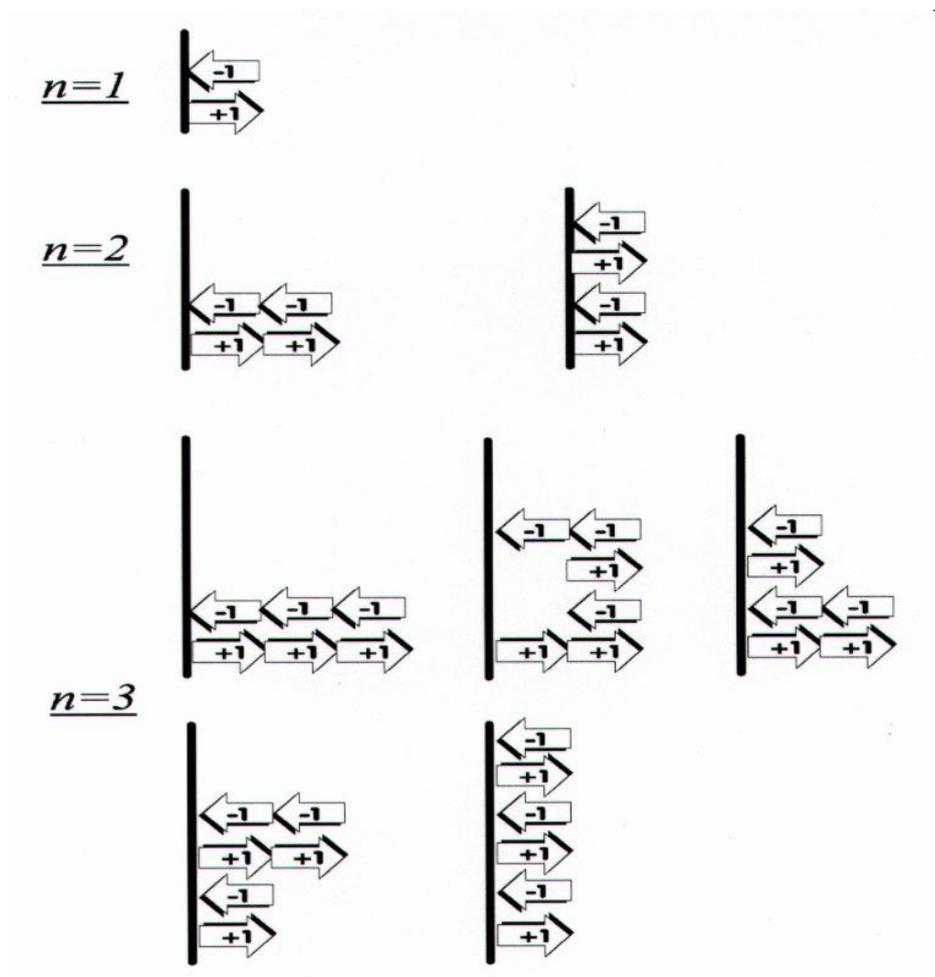


Abbildung 12: Vorwärts- und Rückwärtsschritte

Wir erhalten tatsächlich wieder die Catalan-Zahlenfolge als Antwort (Beweis siehe 5.12).

Es gibt noch viele andere Umformulierungen dieser Fragestellung.

Oft findet man auch zur Kennzeichnung der einzelnen Schritte eine Sequenz aus Einsen und Nullen. "1" steht für +1 oder für einen Vorwärtsschritt. "0" steht für -1 oder für einen Rückwärtsschritt.

Damit haben analog zu oben:

- $n = 1$:

10

- $n = 2$:

1100 1010

- $n = 3$:

111000 110100 110010

101100 101010

- $n = 4$:

11110000 11101000 11100100 11100010

11011000 11001100 11010100 11001010

11010010 10111000 10110100 10110010

10101100 10101010

- ... usw.

Eine andere Möglichkeit der Umformulierung wäre folgende Situation:

Nehmen wir an, $2n$ Menschen stehen in einer Schlange an einem Kartenkiosk, indem Karten für ein Konzert zu 50 DM verkauft werden. Die Hälfte der Menschen in der Schlange - also n - haben jeweils nur einen 100 DM-Schein (Kennzeichnung mit "0") bei sich und die andere Hälfte jeweils nur einen 50 DM-Schein (Kennzeichnung mit "1"). Der Kassier habe anfangs kein Wechselgeld, seine Kasse sei also leer.

Die Frage lautet nun:

Auf wieviele verschiedene Arten können sich die $2n$ Menschen anstellen, so daß der Kassier immer herausgeben kann?

2.14 Zahlensequenz, in der jede Zahl Teiler der Summe ihrer beiden Nachbarn ist

Wir wollen Sequenzen der Art $1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, 1$ betrachten, wobei für die a_i gelten soll:

$$a_i \in \mathbb{N}, a_i > 1 \text{ und } a_i | (a_{i-1} + a_{i+1}) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (a_0 := 1, a_{n+1} := 1)$$

Jedes a_i muß also Teiler der Summe seiner beiden Nachbarn sein.

Wir stellen uns die Frage:

Wieviele verschiedene Sequenzen natürlicher Zahlen dieser Art gibt es ?

Für $n = \underline{1}$ erhalten wir nur die eine Sequenz

$$1, 2, 1$$

Für $n = \underline{2}$ finden wir zwei mögliche Sequenzen

$$1, 2, 3, 1 \quad 1, 3, 2, 1$$

Für $n = \underline{3}$ wird es schon etwas schwieriger, die fünf Sequenzen

$$1, 2, 3, 4, 1 \quad 1, 4, 3, 2, 1$$

$$1, 2, 5, 3, 1 \quad 1, 3, 5, 2, 1$$

$$1, 3, 2, 3, 1$$

zu finden.

Bei $n = \underline{4}$ fühlt man sich beim experimentellen Suchen nicht ganz sicher, ob diese 14 Sequenzen

$$1, 2, 3, 4, 5, 1 \quad 1, 5, 4, 3, 2, 1$$

$$1, 4, 3, 2, 3, 1 \quad 1, 3, 2, 3, 4, 1$$

$$1, 2, 5, 3, 4, 1 \quad 1, 4, 3, 5, 2, 1$$

$$1, 3, 5, 2, 3, 1 \quad 1, 3, 2, 5, 3, 1$$

$$1, 2, 3, 7, 4, 1 \quad 1, 4, 7, 3, 2, 1$$

$$1, 3, 5, 7, 2, 1 \quad 1, 2, 7, 5, 3, 1$$

$$1, 3, 8, 5, 2, 1 \quad 1, 2, 5, 8, 3, 1$$

wirklich alle möglichen sind.

Es ergeben sich also scheinbar wieder die Catalan-Zahlen (Beweis siehe 5.17).

Diese Interpretation der Catalan-Zahlen ist weniger bekannt als die vorhergehenden und scheint auf den ersten Blick auch keinerlei Zusammenhang mit den anderen zu haben.

2.15 Flexagone

Zuletzt möchte ich nun noch auf Flexagone eingehen, wobei ich wieder auf die Catalan-Zahlenfolge stoßen werde. Dazu muß ich etwas weiter ausholen:

Was sind Flexagone?

Mathematik hat viel mit Spielen zu tun und umgekehrt. Flexagone sind ein faszinierendes kleines Spielzeug, das einfach aus einem Streifen Papier gefaltet werden kann.

Im Herbst 1939 faltete der Student ARTHUR H. STONE an der Universität von Princeton zum Vergnügen einen abgerissenen Streifen Papier in verschiedenen Weisen. Dabei stellte er fest, daß eine seiner somit erhaltenen Figuren besonders interessant war. Er faltete den Streifen an drei Stellen so diagonal übereinander, daß ein Sechseck entstand (siehe Abbildung 13).

Wie ging er dabei vor?

Versuchen wir ein solches Flexagon nachzubauen.

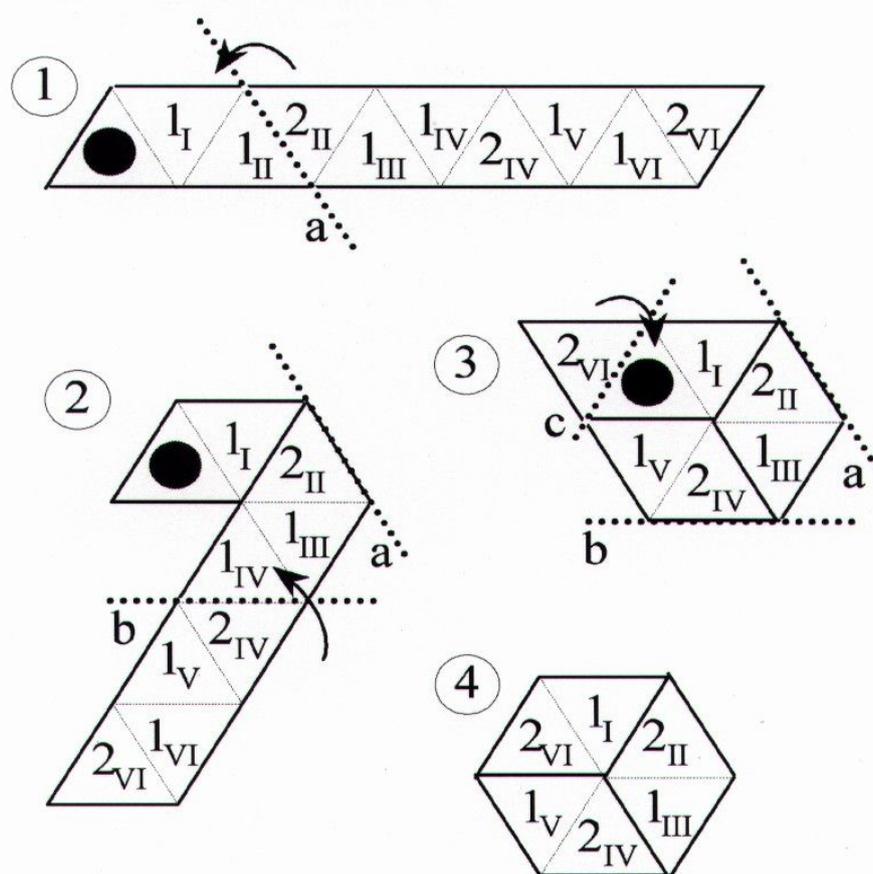


Abbildung 13: Wie entsteht ein Flexagon der Ordnung 3 ?

Zuerst brauchen wir einen Papierstreifen, der lang genug ist, um zehn gleichseitige Dreiecke wie bei ① darauf zu kennzeichnen.

Danach schneiden wir dieses längliche Parallelogramm aus und nummerieren die einzelnen Dreiecke wie bei ① auf der Vorder- und Rückseite des Papierstreifens.

Nun falten wir den Papierstreifen längs der Achse a so, daß das Dreieck 2_{II} oben auf dem Dreieck 1_{II} zu liegen kommt. Nun müßte die Figur aussehen wie bei ② .

Jetzt falten wir längs der Achse b so, daß 2_{IV} oben auf 1_{IV} zu liegen kommt. Dabei stecken wir das Ende des Streifens unter das Dreieck mit dem "•".

Somit haben wir Situation ③ erreicht.

Nun falten wir noch 2_{VI} längs der Achse c oben auf das Dreieck mit dem "•" und kleben diese beiden zusammen, so daß ein geschlossener Ring entsteht, der die Form eines Sechsecks hat und aussieht wie ④ . Somit ist das Flexagon fertig.

In der Situation ④ laufen die römischen Ziffern I bis VI im Uhrzeigersinn und kennzeichnen die einzelnen Dreiecksbündel, die wir kurz mit "Pats" (aus dem Englischen für "Portion") bezeichnen wollen.

Die Pats I, III, V bestehen jeweils nur aus einem Dreieck, während die Pats II, IV, VI jeweils aus zwei Dreiecken bestehen.

Daraus ergibt sich die Ordnung eines Pats:

Die Ordnung eines Pats ist die Anzahl der Dreiecke, die zu diesem Pat zusammengebündelt sind.

Daraus leitet sich die Ordnung eines Flexagons ab:

Die Ordnung eines Flexagons ist die Summe der Ordnungen zweier benachbarter Pats dieses Flexagons.

Hier bei ④ haben also die Pats I, III, V die Ordnung 1 und die Pats II, IV, VI die Ordnung 2. Das Flexagon, das wir gebastelt haben, hat somit die Ordnung 3.

Die arabischen Ziffern 1,2 auf den Teildreiecken haben wir so verteilt, daß sie nun in der Situation ④ die Dreiecke eines Pats durchnummerieren und zwar so, daß das Dreieck, welches am Papierstreifen weiter rechts hängt, auch die höhere Nummer (hier also die 2) bekommt.

Um einen Pat zu kennzeichnen, führen wir folgende Schreibweise ein:

Die Pats I, III, V kennzeichnen wir kurz mit (1) und die Pats II, IV, VI kurz mit (2|1). Wir lesen also die Ziffern eines Pats von oben nach unten.

Für das Flexagon ④ schreiben wir dann kurz (1, 2|1), indem wir nur die ersten zwei Pats angeben, die das Flexagon bereits ganz charakterisieren, da die anderen zwei Pat-Paare die gleichen sind.

Doch nun zu der erstaunlichsten Sache im Zusammenhang mit Flexagonen: dem "Pinch" (aus dem Englischen für "Kneifen"), wie ich ihn nennen will:

Ein Pinch ist eine Klappmöglichkeit des Flexagons, so daß ein "neues" Bild des Flexagons "auftaucht", welches vorher nicht sichtbar war.

Um unser gebasteltes Flexagon ④ zu "pinchen", drehen wir es erst, so daß das Dreieck 2_{II} oben in der Mitte des Flexagons liegt (siehe ab jetzt Abbildung 14).

Nun kneifen wir längs der Achse d die Pats III und IV nach unten zusammen. Währenddessen drücken wir die linke äußere Ecke des Flexagons zwischen Pat I und VI nach unten. Jetzt öffnet sich das Flexagon an der Spitze in der Mitte. Legt man das Flexagon wieder flach hin, so erscheint ein ganz neues Bild des Flexagons, welches zuvor noch im Inneren versteckt war.

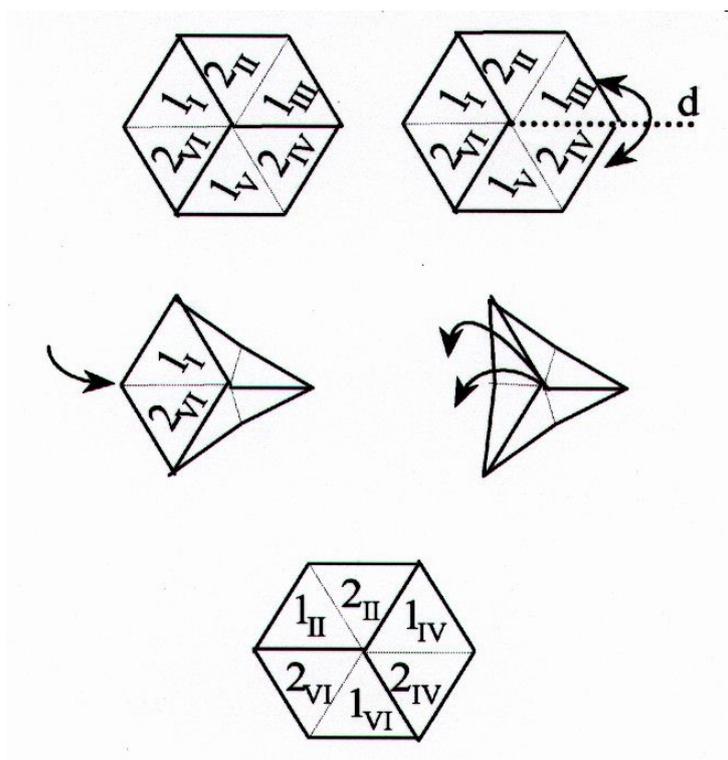


Abbildung 14: Der Pinch eines Flexagon

Dieses durch Pinchen entstandene Flexagon wird analog zu oben mit $(2|1, 1)$ bezeichnet. Ein Flexagon dieser Bezeichnung hätten wir in dem Fall auch einfach durch Drehen um 60 Grad nach rechts bekommen. Jedoch hätte sich so kein neues Bild ergeben.

Durch geschickte Kennzeichnung können wir nun feststellen wieviele verschiedene Bilder so ein Flexagon annehmen kann. Außerdem können wir das Pinchen solange fortsetzen, bis wir wieder das ursprüngliche Bild erhalten, wobei wir zwischendrin das Flexagon immer um 60 Grad nach rechts drehen müssen, wenn kein weiterer Pinch mehr möglich ist.

Jedoch würde eine noch eingehendere Beschreibung der Flexagone hier jetzt den Rahmen meiner Arbeit sprengen und deswegen möchte ich auf C.O. OAKLEYS und R.J. WISNERS Artikel "*Flexagons*" [7] verweisen, worin der interessierte Leser nähere Informationen über all diese Fragen Flexagone betreffend findet.

Dort wird auch beschrieben, wie Flexagone beliebiger Ordnung gebastelt werden können.

Ich will nun im folgenden Flexagone mathematisch beschreiben.

Dazu gehen wir von dem konkret gebastelten Flexagon über zu einem mathematisch definierten **abstrakten Flexagon**.

Die entsprechenden Bezeichnungen habe ich oben bereits eingeführt.

Zuerst gehe ich von Pats aus:

Definition eines Pats:

Sei $m \in \mathbb{N}$. Für $m = 1$ wird die einfache Permutation (1) der Zahl 1 Pat der Ordnung 1 genannt.

Für $m > 1$ zerlege $m = r + s$ mit $r, s \in \mathbb{N}$.

Seien $a_1 a_2 \dots a_r$ und $b_1 b_2 \dots b_s$ Permutationen der natürlichen Zahlen $1, 2, \dots, r$ bzw. $1, 2, \dots, s$, so daß sie einen Pat der Ordnung r bzw. der Ordnung s ergeben.

Ein Pat der Ordnung m ist dann eine Permutation

$$(A_r A_{r-1} \dots A_2 A_1 | b_s b_{s-1} \dots b_2 b_1)$$

wobei $A_i := a_i + s$

Somit haben wir einen Pat beliebiger Ordnung induktiv definiert. Mit Hilfe dessen kommt jetzt:

Definition eines abstrakten Flexagons:

Seien P, Q Pats der Ordnung p bzw. q ($p, q \in \mathbb{N}$)

Dann heißt $F := (P, Q)$ Flexagon der Ordnung N , wobei $N := p + q$.

Anhand dieser Definitionen stellen wir uns nun die Fragen:

1. Wieviele Pats der Ordnung $m = n + 1$ gibt es ?

2. Wieviele Flexagone der Ordnung $N = n + 1$ gibt es ?

Zur ersten Frage:

- $n = 1$: $\implies m = 2$:

$2 = 1 + 1$. Hier gibt es nur den Pat $(2|1)$.

Laut Definition ist ein Pat der Form $(1|2)$ nicht möglich, obwohl wir ohne weiteres einen solchen basteln könnten. Dies liegt daran, daß in unserer Definition die Windungsrichtung beim Basteln eines Flexagons automatisch mit festgelegt ist.

Wir haben die Windungsrichtung für alle Flexagone so festgelegt, daß sie sich - von oben betrachtet - so winden, wie ein Rad, daß auf uns zu rollt.

- $n = 2$: $\implies m = 3$:

Induktiv ergeben sich 2 mögliche Pats:

Für $3 = 1 + 2$ $(3|12)$ und für $3 = 2 + 1$ $(23|1)$

- $n = 3$: $\implies m = 4$:

Für $4 = 1 + 3$ $(4|213)$ und $(4|132)$.

Für $4 = 2 + 2$ $(34|12)$ und

für $4 = 3 + 1$ $(324|1)$ und $(243|1)$.

Hier gibt es also diese 5 Möglichkeiten.

- $n = 4$: $\implies m = 5$:

Für $5 = 1 + 4$ $(5|3124)$ $(5|2314)$ $(5|2143)$ $(5|1423)$ $(5|1342)$.

Für $5 = 2 + 3$ $(45|213)$ $(45|132)$.

Für $5 = 3 + 2$ $(435|12)$ $(354|12)$.

Für $5 = 4 + 1$ $(4235|1)$ $(3425|1)$ $(3254|1)$ $(2534|1)$ $(2453|1)$.

Wir erkennen, daß es in diesem Fall nur diese 14 Pats gibt.

Somit sehen wir also, daß aufgrund der Definition der Pats die Catalan-Zahlen ihre Anzahl beschreiben (Beweis siehe 5.18).

Zur zweiten Frage:

Nach der Definition des abstrakten Flexagons können wir nun aus diesen Pats Flexagone zusammensetzen:

- $\underline{n = 1}$: $\implies N = 2$:
 $2 = 1 + 1$. Hier gibt es nur das Flexagon $(1, 1)$.
- $\underline{n = 2}$: $\implies N = 3$:
 Aus den Pats ergeben sich 2 mögliche Flexagone:
 Für $3 = 1 + 2$ $(1, 2|1)$ und für $3 = 2 + 1$ $(2|1, 1)$
- $\underline{n = 3}$: $\implies N = 4$:
 Für $4 = 1 + 3$ $(1, 23|1)$ und $(1, 3|12)$.
 Für $4 = 2 + 2$ $(2|1, 2|1)$ und
 für $4 = 3 + 1$ $(23|1, 1)$ und $(3|12, 1)$.
 Hier gibt es also 5 Möglichkeiten.
- $\underline{n = 4}$: $\implies N = 5$:
 Für $5 = 1 + 4$ $(1, 4|213)$ $(1, 4|132)$ $(1, 34|12)$ $(1, 324|1)$ $(1, 243|1)$.
 Für $5 = 2 + 3$ $(2|1, 23|1)$ $(2|1, 3|12)$.
 Für $5 = 3 + 2$ $(23|1, 2|1)$ $(3|12, 2|1)$.
 Für $5 = 4 + 1$ $(4|213, 1)$ $(4|132, 1)$ $(34|12, 1)$ $(324|1, 1)$ $(243|1, 1)$.
 Wir erhalten 14 Möglichkeiten.

Tatsächlich ist die Antwort auf die zweite Frage wieder durch die Catalan-Zahlen gegeben (Beweis siehe 5.18).

Im ersten Moment könnte man hier nun meinen, daß alles sei doch nur ein theoretisches Konstrukt, um vielleicht wieder auf Catalan-Zahlen zu stoßen. Aber weit gefehlt!

Es ist ohne weiteres möglich alle diese Flexagone zu basteln und sie anschließend durch Pinchen teilweise ineinander überzuführen.

Dies möchte ich an dieser Stelle aber nicht weiter ausführen und nochmals auf OAKLEY und WISNER [7] verweisen.

Zur besseren Vorstellung lege ich selbstgebastelte Flexagone der Ordnung 3,4,5 bei, an denen man schön die oben aufgeführten Flexagone durch Pinchen bzw. Drehen erhalten kann.

Nun möchte ich zurückkehren zu

3 Eulers Formel zur Polygonzerlegung

Für die Anzahl E_n der möglichen Zerlegungen eines n -Ecks fand EULER (siehe (1)):

$$E_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n - 10)}{(n - 1)!}$$

Wie können wir diese Formel herleiten?

Dazu möchte ich den Weg von DÖRRIE (siehe [1]) gehen und zuerst auf die Rekursionsformel für E_n eingehen, die SEGNER 1758 aufstellte, nachdem ihm EULER die sieben ersten Zerlegungszahlen 1, 2, 5, 14, 42, 132 und 429 mitgeteilt hatte.

Wir numerieren die Ecken eines beliebigen n -Ecks von 1 bis n durch. Die Seite $n1$ (d.h. die Verbindungsstrecke zwischen den Eckpunkten "1" und "n") nehmen wir als Grundlinie her. Diese Grundlinie ist in jeder der E_n Zerlegungen in einem Dreieck ebenfalls Grundlinie, dessen Spitze in einer der anderen Ecken $2, 3, \dots, n - 1$ liegt. Nehmen wir an, die Spitze dieses Dreiecks liege im Eck r , so liegt links von diesem Dreieck $n1r$ ein r -Eck. Rechts davon bleibt ein $(n - r + 1)$ -Eck. Das r -Eck hat E_r mögliche Zerlegungen in Dreiecke und das $(n - r + 1)$ -Eck hat E_{n-r+1} mögliche Zerlegungen. Somit bekommen wir für die Wahl der Spitze r genau $E_r \cdot E_{n-r+1}$ verschiedene Zerlegungen des n -Ecks. Jede Zerlegung des n -Ecks kann durch eine solche Aufteilung eindeutig erreicht werden, indem r alle Ecken $2, 3, \dots, n - 1$ durchläuft. Die erhaltenen Zerlegungsanzahlen müssen einfach aufsummiert werden, womit wir folgende Rekursionsformel hergeleitet haben:

$$E_n = E_2 E_{n-1} + E_3 E_{n-2} + \dots + E_{n-1} E_2 \quad (4)$$

wobei der Faktor $E_2 := 1$.

Um nun auf Eulers Formel zu kommen, gehen wir einen Umweg über ein anderes Problem, das wir schon in 2.1 kennengelernt haben: das Catalansche Problem. Dabei sind im Prinzip zwei Fragen zu beantworten:

1. Auf wieviele Arten läßt sich ein Produkt aus n verschiedenen Faktoren paarig berechnen?
2. Auf wieviele Arten läßt sich ein Produkt aus n verschiedenen Faktoren paarig berechnen, wenn ihre Reihenfolge festgelegt ist?

Die erste Anzahl nennen wir R_n (nach RODRIGUES, der 1838 eine Idee zur Lösung dieser Frage veröffentlichte) und die zweite Anzahl C_n^+ (nach CATALAN; das Plus dient zur Unterscheidung von der in Kapitel 1 definierten Catalan-Zahlenfolge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$).

Mit RODRIGUES Idee finden wir zuerst eine Formel für R_n :

Dazu denken wir uns die R_n n -gliedrigen Produkte, die zu Paaren geklammert sind. Diese bestehen alle aus $(n - 1)$ paarigen Multiplikationen der Form $a \cdot b$. Nun nehmen wir einen $(n + 1)$ -ten Faktor f hinzu und können mit diesem alle R_{n+1} $(n + 1)$ -gliedrigen paarigen Produkte bilden. Aus $a \cdot b$ entstehen dabei vier neue paarige Produkte:

$$(f \cdot a) \cdot b \quad , \quad (a \cdot f) \cdot b \quad , \quad a \cdot (f \cdot b) \quad , \quad a \cdot (b \cdot f)$$

Diese vierfache Anbringung des Faktors f ist bei jedem der $(n - 1)$ Multiplikationspaaren möglich.

Also erhalten wir aus jedem der n -gliedrigen paarigen Produkte P genau

$$4(n - 1)$$

$(n + 1)$ -gliedrige paarige Produkte.

Dazu kommen noch jeweils die beiden Produkte $f \cdot P$ und $P \cdot f$.

Somit bekommen wir für jedes der R_n n -gliedrigen paarigen Produkte

$$4(n - 1) + 2 = 4n - 2$$

$(n + 1)$ -gliedrige paarige Produkte.

Damit haben wir folgende Rekursionsformel hergeleitet:

$$R_{n+1} = (4n - 2) \cdot R_n \tag{5}$$

Es ist also:

$$R_2 = 2 \text{ (Aus zwei Faktoren } a \text{ und } b \text{ lassen sich nur } a \cdot b \text{ und } b \cdot a \text{ bilden.)}$$

$$R_3 = 6 \cdot R_2 = 2 \cdot 6 = 12$$

$$R_4 = 10 \cdot R_3 = 2 \cdot 6 \cdot 10 = 120$$

$$R_5 = 14 \cdot R_4 = 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 = 1680$$

$$R_6 = 18 \cdot R_5 = 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 = 30240$$

...

Schließlich sehen wir induktiv, daß gilt:

$$R_n = 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \dots \cdot (4n - 6) \tag{6}$$

Da es $n!$ verschiedene Reihenfolgen für n Faktoren eines Produkts gibt, ergibt sich daraus sofort eine direkte Formel für C_n^+ mit $n > 1$:

$$C_n^+ = \frac{R_n}{n!} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \dots \cdot (4n - 6)}{n!} \tag{7}$$

Jetzt möchte ich noch eine Rekursionsformel für die Antwort auf die zweite Frage - also für C_n^+ - herleiten.

Dazu betrachten wir ein beliebig paarig geklammertes n -gliedriges Produkt mit festgelegter Reihenfolge der Faktoren $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$. Dieses hat die Form

$$\left(\quad \right) \cdot \left(\quad \right),$$

wobei in der linken Klammer die ersten r Faktoren f_1, f_2, \dots, f_r in irgendeiner Weise paarig geklammert stehen und in der rechten Klammer die restlichen $n - r$ Faktoren f_{r+1}, \dots, f_n irgendwie geklammert stehen. Somit gibt es also links C_r^+ verschiedene Klammerungsmöglichkeiten und rechts C_{n-r}^+ verschiedene Möglichkeiten die $n - r$ Faktoren zu Paaren zu klammern. Das liefert $C_r^+ \cdot C_{n-r}^+$ verschiedene paarig geklammerte n -gliedrige Produkte mit fester Reihenfolge.

Nun kann r die Werte von 1 bis $n - 1$ durchlaufen und somit erhalten wir folgende Rekursionsformel:

$$C_n^+ = C_1^+ C_{n-1}^+ + C_2^+ C_{n-2}^+ + \dots + C_{n-1}^+ C_1^+ \quad (8)$$

Ausgehend von den ersichtlichen Startwerten $C_1^+ = 1$ und $C_2^+ = 1$ liefert diese Formel

$$C_3^+ = 2, \quad C_4^+ = 5, \quad C_5^+ = 14, \quad C_6^+ = 42.$$

Natürlich stimmen diese Werte mit denen überein, die wir mit Formel (7) bekommen. Aufgrund dieser Startwerte (vgl. Kapitel 1) und (4) und (8) folgt sofort:

$$E_n = C_{n-1}^+ \quad (9)$$

Daraus folgt wiederum mit (7) sofort die Eulersche Formel

$$E_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n - 10)}{(n - 1)!},$$

aus welcher ersichtlich die Rekursionsformel

$$E_n = \frac{4n - 10}{n - 1} \cdot E_{n-1} \quad (10)$$

folgt.

Mit der Definition der Catalan-Zahlen (2) $C_0 := 1$ und $C_n := E_{n+2}$ für $n \geq 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich:

$$C_n = C_{n+1}^+ = E_{n+2} \quad (11)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Somit hätten wir also bereits gezeigt, daß die Antwort auf das Catalansche Problem 2.1 auch tatsächlich die Catalan-Zahlenfolge ist.

4 Formeln für die Catalan-Zahlenfolge

Aus (4) und (11) erhalten wir die Rekursionsformel für die Catalan-Zahlen ($n \geq 1$):

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_0 = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1} \quad (12)$$

Nach Eulers Formel gilt für die Catalan-Zahlen ($n \geq 1$):

$$C_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n-2)}{(n+1)!} \quad (13)$$

Analog zu oben ergibt sich daraus die einfache Rekursionsformel

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1} \cdot C_{n-1} \quad (14)$$

Die direkte Berechnungsformel der Catalan-Zahlen (13) können wir noch umformen:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n-2)}{(n+1)!} = \frac{2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(n+1)!} = \\ &= \frac{2^n \cdot (2n)!}{(n+1)! \cdot 2^n \cdot n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

Womit wir also die weitaus bekannteste Formel

$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \quad (15)$$

für Catalan-Zahlen erhalten haben.

Diese Formel läßt sich auch analytisch aus der Rekursionsformel (12) herleiten: Setze für die gewöhnliche erzeugende Funktion der Catalan-Zahlen

$$C(z) := \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \quad \text{mit } z \in \mathbb{R} \quad (16)$$

Dann gilt folgende Funktionalgleichung:

$$C(z) = z \cdot C(z)^2 + 1 \quad (17)$$

Beweis: Wir betrachten die rechte Seite der Funktionalgleichung:

$$\begin{aligned}
 z \cdot C(z)^2 + 1 &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{n+1} = \\
 &= 1 + (C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots) \cdot (C_0 z + C_1 z^2 + C_2 z^3 + \dots) = \\
 &= 1 + \underbrace{C_0^2}_{C_1} z + \underbrace{(C_0 C_1 + C_1 C_0)}_{C_2} z^2 + \underbrace{(C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0)}_{C_3} z^3 + \dots = \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = C(z) \qquad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

Also gilt:

$$C(z)^2 - \frac{C(z)}{z} + \frac{1}{z} = 0$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind:

$$C(z)_{1,2} = \frac{\frac{1}{z} \pm \sqrt{\frac{1}{z^2} - \frac{4}{z}}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}$$

Für $|z| < \frac{1}{4}$ gilt $\frac{1}{2z} < \frac{1+\sqrt{1-4z}}{2z}$ und deswegen geht $\frac{1+\sqrt{1-4z}}{2z} \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow 0$. Dies steht aber im Widerspruch zu $C(0) = C_0 = 1$. Daher fällt die Möglichkeit mit dem Pluszeichen weg und es muß das Minuszeichen gelten:

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} \tag{18}$$

Damit stimmt auch

$$C(0) = \lim_{z \rightarrow 0} C(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} \stackrel{\text{L'HOSPITAL}}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-4z}} \cdot (-4)}{2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-4z}} = 1 = C_0$$

Nun entwickeln wir $\sqrt{1-4z}$ in eine Potenzreihe:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1-4z} &= 1 + \frac{1}{2}(-4z) - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}(-4z)^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}(-4z)^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}(-4z)^4 + \dots = \\
 &= 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2z + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot 2 \cdot 4z^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 4^2 z^3 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot 2 \cdot 4^3 z^4 + \dots \right) = \\
 &= 1 - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n}}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} \cdot 2 \cdot 4^n \cdot z^{n+1} = \\
 &= 1 - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot 4^n}{n! \cdot (n+1)! \cdot 2^n \cdot 2^n} \cdot z^{n+1} = \\
 &= 1 - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \cdot z^{n+1}
 \end{aligned}$$

Somit haben wir

$$C(z) = \frac{1 - \left(1 - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \cdot z^{n+1}\right)}{2z} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}}_{=C_n} \cdot z^n \quad (19)$$

und damit die Formel (15) abgeleitet.

Genauso stoßen wir auf diese Weise natürlich aber auch auf Eulers Formel zu den Catalan-Zahlen:

Betrachten wir die Potenzreihenentwicklung (16). Daraus können wir entnehmen, daß unsere gesuchte Zahl C_n der Koeffizient von z^n in dieser Entwicklung von $C(z)$ ist. Aus der Entwicklung von $\sqrt{1-4z}$ geht somit hervor:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (2n+2)} \cdot 2 \cdot 4^n \\ &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (2n+2)} \cdot 2^{2n+1} \\ &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2^{2n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n+1) \cdot 2^{n+1}} \\ &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n+1)} \\ &= \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n-2)}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Die Formel (15) taucht in anderer Literatur in zahlreichen verschiedenen Darstellungen auf. So gilt z.B.

$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{2n+1} \cdot \binom{2n+1}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \quad (20)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} &= \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)! \cdot (n+1)!} = \\ &= \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \binom{2n}{n} \cdot \frac{n+1-n}{n+1} = \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = C_n \\ \frac{1}{n} \cdot \binom{2n}{n+1} &= \frac{1}{n} \cdot \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot (n-1)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} = C_n \\ \frac{1}{2n+1} \cdot \binom{2n+1}{n} &= \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n+1)!}{n! \cdot (n+1)!} = \frac{(2n)!}{n! \cdot (n+1)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} = C_n \quad \text{q.e.d} \end{aligned}$$

Aus (12) und (15) folgt eine kombinatorische Beziehung zwischen Binomialkoeffizienten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} &= \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} + \frac{1}{2} \binom{2}{1} \cdot \frac{1}{n-1} \binom{2n-4}{n-2} + \dots + \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} = \\ &= \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} + \frac{1}{n-1} \binom{2n-4}{n-2} + 2 \cdot \frac{1}{n-2} \binom{2n-6}{n-3} + \dots + \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \end{aligned} \quad (21)$$

Wir können die n -te Catalan-Zahl C_n auch mit Hilfe der Gamma-Funktion ausdrücken (siehe CATALAN [3]), da $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1) \cdot n! \cdot n!} = \frac{\Gamma(2n+1)}{(n+1) \cdot \Gamma(n+1) \cdot \Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+2) \cdot \Gamma(n+1)}$$

$$C_n = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+2) \cdot \Gamma(n+1)} \quad (22)$$

Hiermit stoßen wir auf eine Integraldarstellung der Catalan-Zahlen (siehe CATALAN [3] und BINET [4]):

$$C_n = \frac{2^{2n+1}}{\pi} \int_0^1 x^{n-\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} dx \quad (23)$$

Beweis:

Für den Beweis brauchen wir noch einige Identitäten, die für die Gamma-Funktion gelten:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)} = \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} dx$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+2) \cdot \Gamma(n+1)} = \frac{1}{\Gamma(n+2)} \cdot \frac{2n \cdot \Gamma(2n)}{n \cdot \Gamma(n)} = \frac{2}{\Gamma(n+2)} \cdot \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)} = \\ &= \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+2)} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \\ &= \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}} \cdot \int_0^1 x^{n-\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{2^{2n+1}}{\pi} \int_0^1 x^{n-\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} dx \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Wie man schnell erkennt, ist es doch sehr mühsam mittels dieser Formel die Catalan-Zahlen explizit zu berechnen. Sie stammt von E.C. CATALAN und M.J. BINET, die sie 1838 bzw. 1839 getrennt hergeleitet haben.

In der gleichen Veröffentlichung [4] leitet M.J. BINET zwei weitere Rekursionsformeln für die Catalan-Zahlen ab:

Zuerst betrachtet er die Reihenentwicklung (16) und die Identität (18)

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}$$

und substituiert hierin

$$z =: y - y^2 = y(1 - y) \quad .$$

Damit erhalten wir

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4y + 4y^2}}{2(y - y^2)} = \frac{1 - (1 - 2y)}{2y(1 - y)} = \frac{1}{1 - y} \quad .$$

Dieses entwickeln wir in eine Reihe

$$C(z) = \frac{1}{1 - y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + \dots \quad . \quad (24)$$

Führen wir die gleiche Substitution in der Reihenentwicklung (16) durch, so ergibt sich

$$\begin{aligned} C(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n (y(1 - y))^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n y^n \left(\binom{n}{0} - \binom{n}{1}y + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} y^n \right) = \quad (25) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\binom{n}{0} y^n - \binom{n}{1} y^{n+1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} y^{2n} \right) = \end{aligned}$$

$$= C_0 + C_1(y - y^2) + C_2(y^2 - 2y^3 + y^4) + C_3(y^3 - 3y^4 + 3y^5 - y^6) + C_4(y^4 - 4y^5 + 6y^6 - 4y^7 + y^8) + \dots =$$

$$= C_0 + C_1 y + (C_2 - C_1)y^2 + (C_3 - 2C_2)y^3 + (C_4 - 3C_3 + C_2)y^4 + (C_5 - 4C_4 + 3C_3)y^5 + \dots =$$

Durch Koeffizientenvergleich mit (24) bekommen wir

$$1 = C_0$$

$$1 = C_1$$

$$1 = C_2 - C_1$$

$$1 = C_3 - 2C_2$$

$$1 = C_4 - 3C_3 + C_2$$

$$1 = C_5 - 4C_4 + 3C_3$$

$$1 = C_6 - 5C_5 + 6C_4 - C_3$$

...

$$1 = C_n - (n - 1)C_{n-1} + \frac{(n - 2)(n - 3)}{2}C_{n-2} - \frac{(n - 3)(n - 4)(n - 5)}{2 \cdot 3}C_{n-3} + \dots$$

also

$$1 = C_n - \binom{n-1}{1} C_{n-1} + \binom{n-2}{2} C_{n-2} - \binom{n-3}{3} C_{n-3} + \dots + (-1)^{n-b} \binom{b}{n-b} C_b$$

oder

$$1 = \sum_{k=0}^{n-b} (-1)^k \binom{n-k}{k} C_{n-k} \quad (26)$$

wobei

$$b := \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

mit $\lfloor a \rfloor$ ist größte ganze Zahl kleiner oder gleich a .

Nach C_n aufgelöst ergibt (26):

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-b} (-1)^{k-1} \binom{n-k}{k} C_{n-k} + 1 \quad (27)$$

Dies ist die eine Rekursionsformel, die M.J.BINET hergeleitet hat. Die andere nun folgende hat E.C. CATALAN (siehe [5]) unabhängig von ihm im gleichen Jahr auch gefunden. BINET ging aus von (24) und (25):

$$C(z) = \frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (y(1-y))^n$$

Multiplizieren wir diese Gleichung auf beiden Seiten mit $1-y$ so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot y^n \cdot (1-y)^{n+1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n y^n \left(\binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{1} y + \dots + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\binom{n+1}{0} y^n - \binom{n+1}{1} y^{n+1} + \dots + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} y^{2n+1} \right) = \\ &= C_0(1-y) + C_1(y-2y^2+y^3) + C_2(y^2-3y^3+3y^4-y^5) + C_3(y^3-4y^4+6y^5-4y^6+y^7) + \dots = \\ &= 1-y + C_1 y + (C_2 - 2C_1) y^2 + (C_3 - 3C_2 + C_1) y^3 + (C_4 - 4C_3 + 3C_2) y^4 + (C_5 - 5C_4 + 6C_3 - C_2) y^5 + \dots \end{aligned}$$

Daher müssen alle Koeffizienten der Potenzen von y in diesem Ausdruck gleich Null sein:

$$\begin{aligned}
0 &= C_1 - 1 \\
0 &= C_2 - 2C_1 \\
0 &= C_3 - 3C_2 + C_1 \\
0 &= C_4 - 4C_3 + 3C_2 \\
0 &= C_5 - 5C_4 + 6C_3 - C_2 \\
0 &= C_6 - 6C_5 + 10C_4 - 4C_3 \\
&\dots \\
0 &= C_n - nC_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}C_{n-2} - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3}C_{n-3} + \dots
\end{aligned}$$

also

$$0 = C_n - \binom{n}{1}C_{n-1} + \binom{n-1}{2}C_{n-2} - \binom{n-2}{3}C_{n-3} + \dots + (-1)^{n-c} \binom{c+1}{n-c}C_c$$

oder

$$0 = \sum_{k=0}^{n-c} (-1)^k \binom{n-k+1}{k} C_{n-k} \quad (28)$$

wobei

$$c := \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Nach C_n aufgelöst ergibt (27):

$$\boxed{C_n = \sum_{k=1}^{n-c} (-1)^{k-1} \binom{n-k+1}{k} C_{n-k}} \quad (29)$$

Dies ist die zweite Rekursionsformel BINETS, die doch sehr verwandt mit der ersten ist. CATALAN kam auf einem ganz anderen Weg auch auf diese Formel (siehe [5]).

5 Äquivalenz der Interpretationen der Catalan-Zahlen

In diesem Kapitel möchte ich nun zeigen, daß die 15 verschiedenen Probleme aus Kapitel 2 tatsächlich die Catalan-Zahlenfolge als Lösung besitzen. Dabei möchte ich nach folgenden Beweisschema vorgehen:

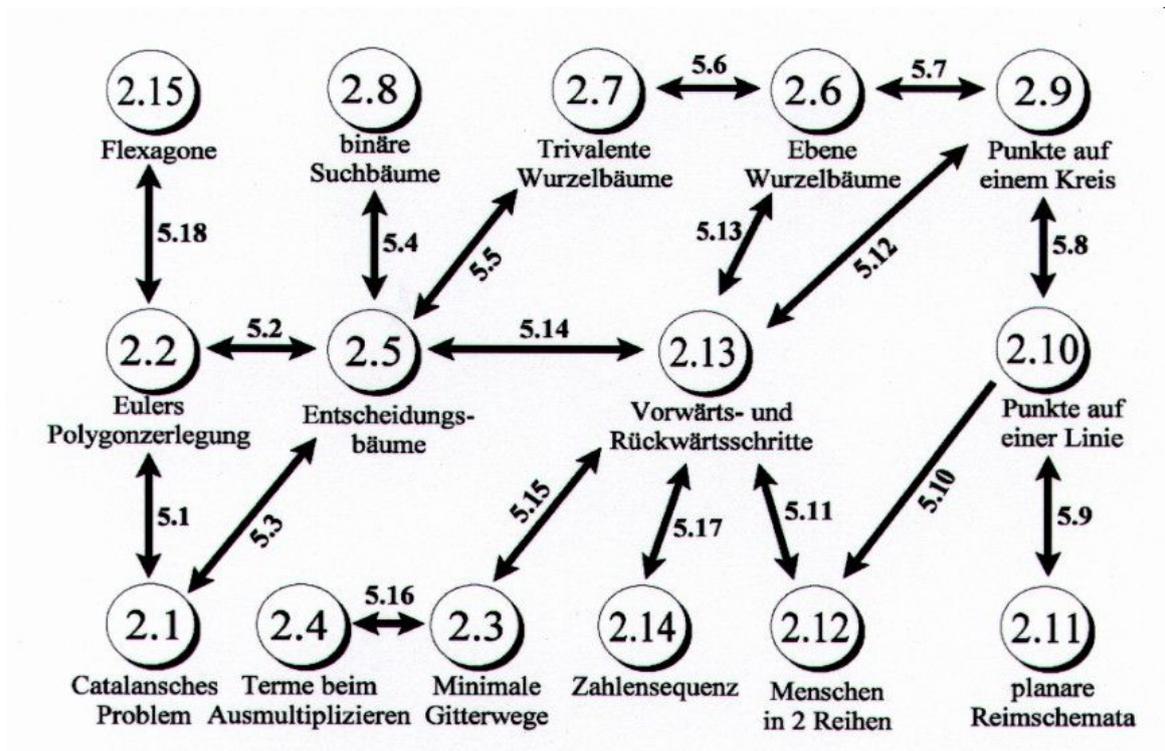


Abbildung 15: schematische Beweisübersicht

Mir liegt hierbei nicht daran, den Beweis so kurz wie möglich zu gestalten, sondern eventuell sogar verschiedene Beweismöglichkeiten vorzustellen. Im Folgenden werde ich also nun die 18 (Doppel-)Folgezeichen des Beweisschemas beweisen:

5.1 $2.1 \Leftrightarrow 2.2$

Im Kapitel 3 haben wir durch die Beziehung (11) bereits gezeigt, daß die Antwort auf das Catalansche Problem 2.1 die Catalan-Zahlen sind und somit mit der Antwort auf Eulers Problem 2.2 der Polygonzerlegung in Dreiecke übereinstimmt.

Es gibt auch noch eine andere nicht rechnerische Möglichkeit, diese Äquivalenz zu zeigen: Zuerst definieren eine Seite des n -Ecks, das zerlegt werden soll, als Grundseite. Alle anderen Seiten benennen wir alphabetisch durch. Nun werden alle Diagonalen von außen nach innen zur Grundseite hin so benannt, daß die Namen der beiden anliegenden Seiten bzw. Diagonalen in Klammern geschrieben werden. Dies zieht sich durch das n -Eck hindurch bis letztlich die Grundseite benannt wird. Die Bezeichnung der Grundseite ist eindeutig für diese Dreieckszerlegung und stimmt mit genau einer Klammerungsmöglichkeit des Problems 2.1 überein. Durch folgende Abbildung wird dies leicht nachvollziehbar:

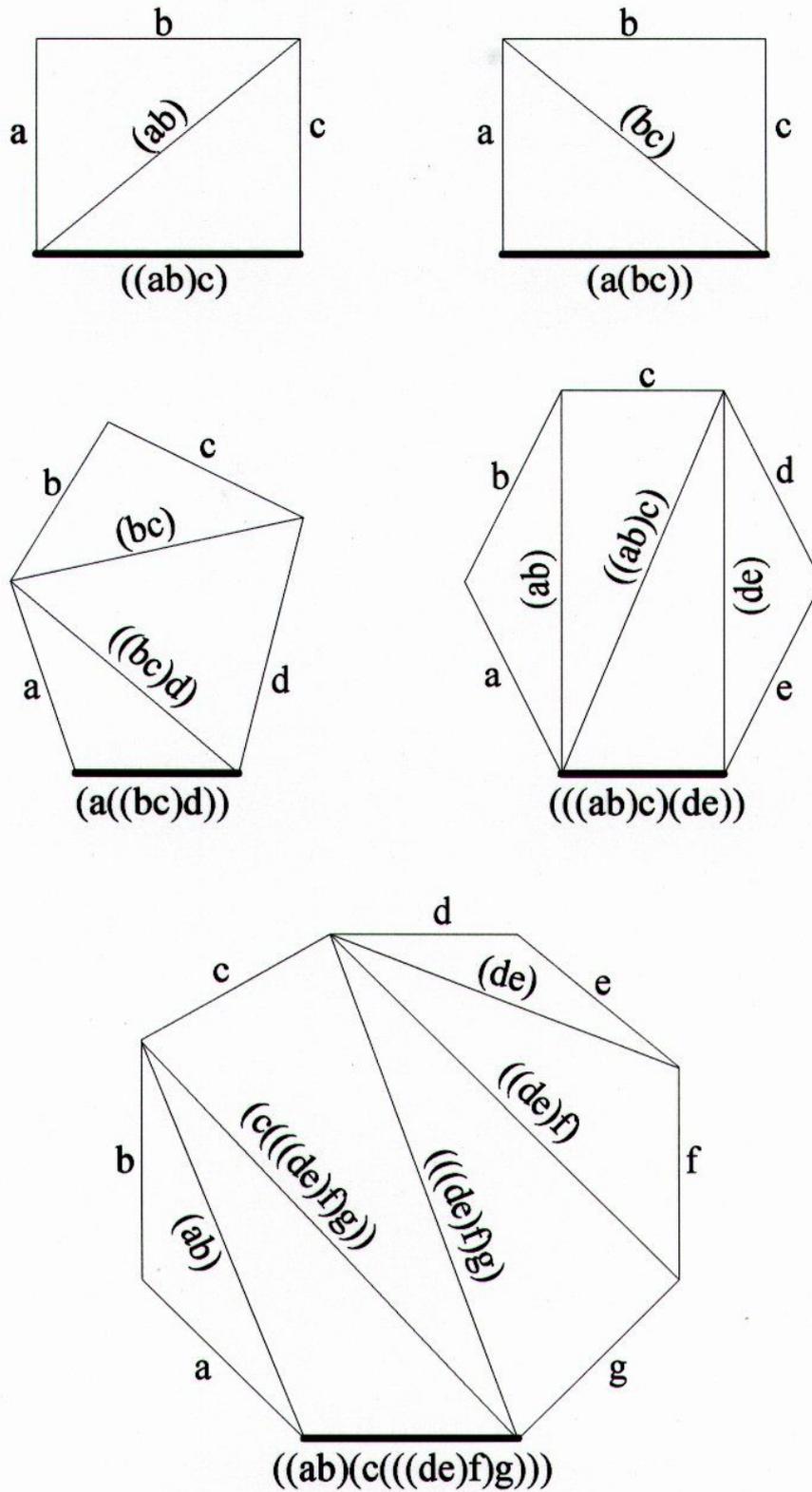


Abbildung 16: Bijektive Beziehung zwischen Polygonzerlegung und dem Catalanschen Problem

5.2 2.2 \Leftrightarrow 2.5

Um zu zeigen, daß jede Polygonzerlegung in Dreiecke genau einem Entscheidungsbaum 2.Grades entspricht, möchte ich folgende Abbildung benützen:

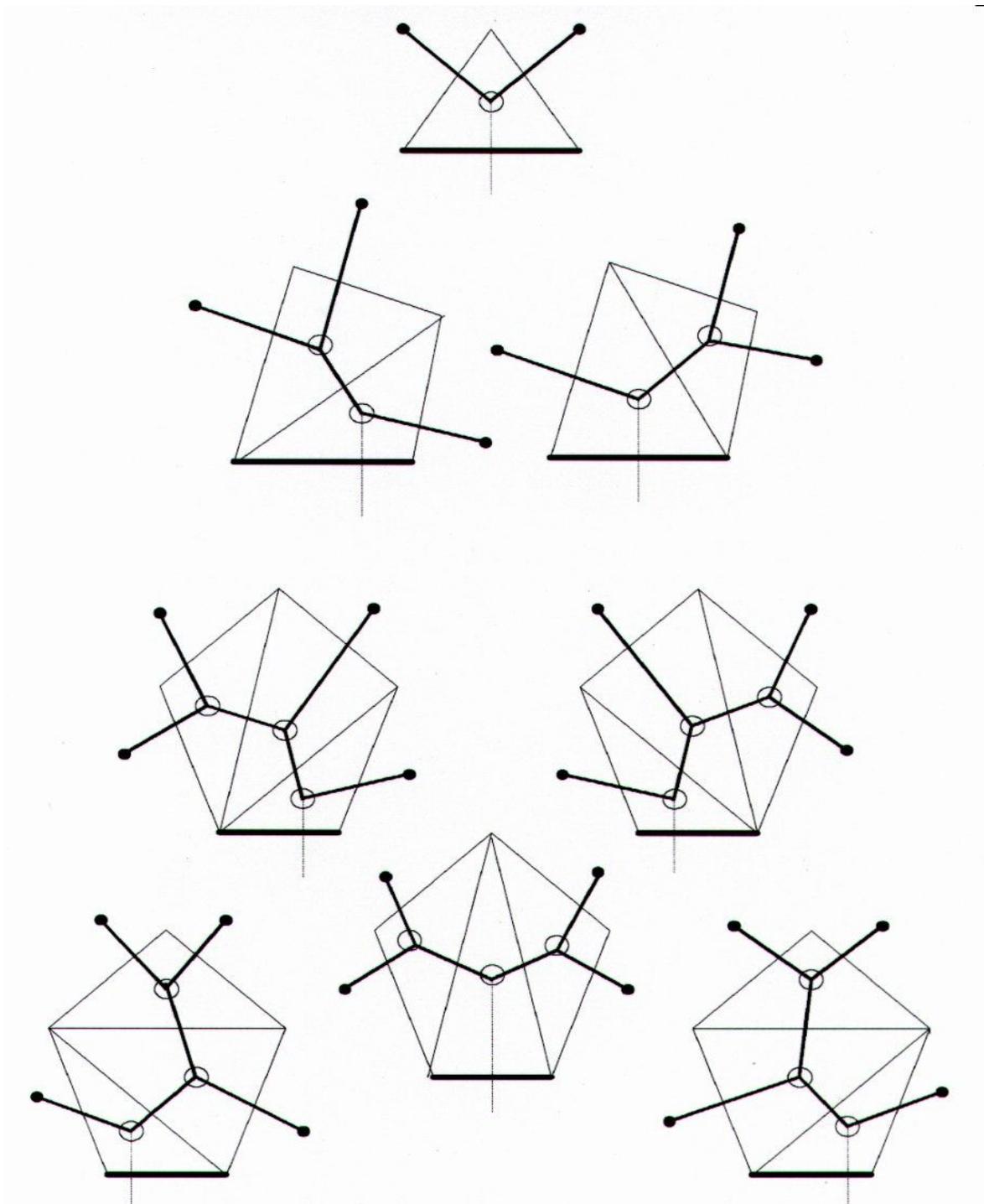


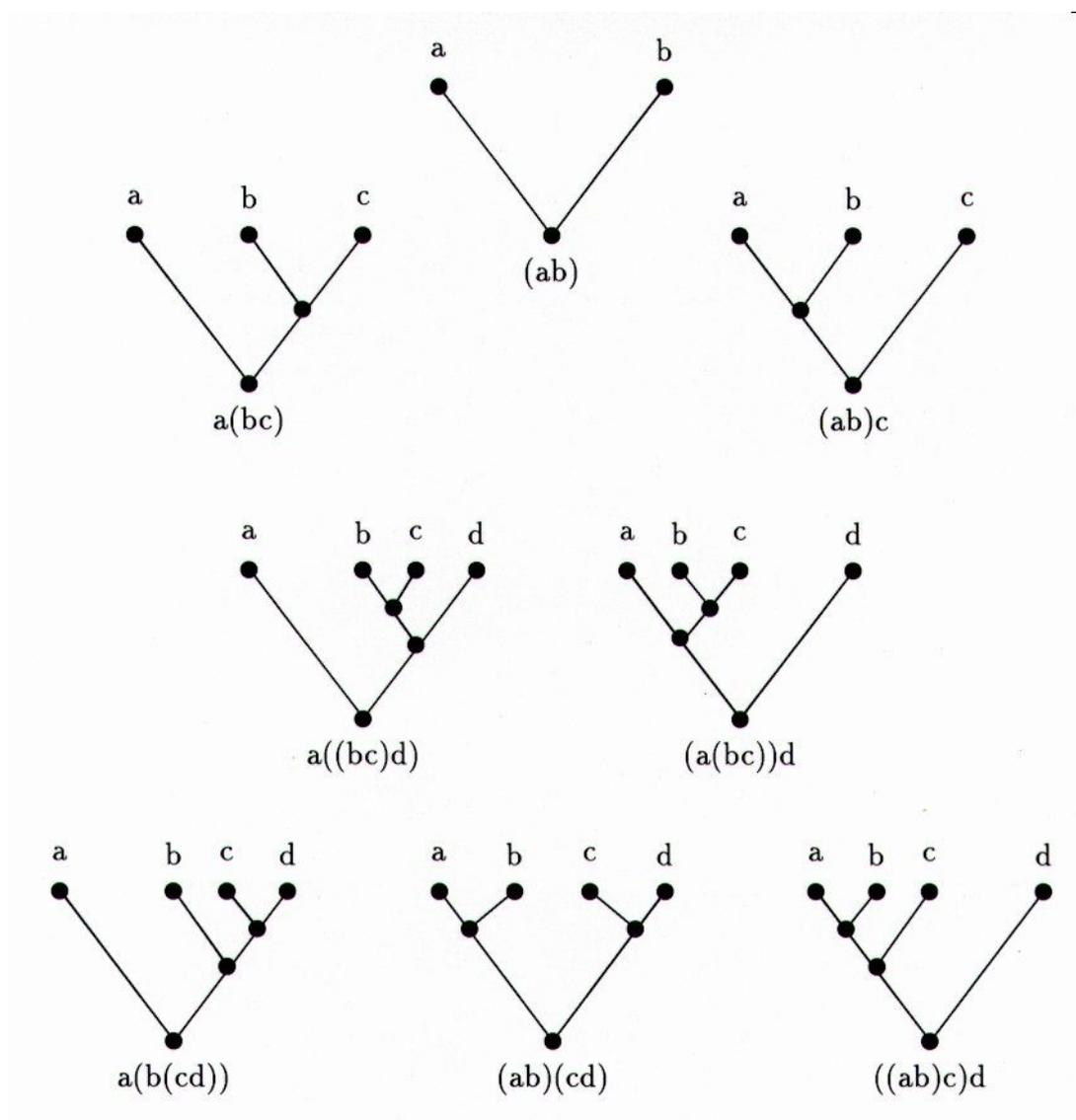
Abbildung 17: Bijektive Beziehung zwischen Polygonzerlegung und Entscheidungsbaum 2.Grades

Wir gehen von einer Zerlegung eines m -Ecks in Dreiecke aus. Wieder definieren wir uns eine beliebige Seite als Grundseite. Durch diese gelangen wir in das Grunddreieck, in welchem der Ausgangspunkt für den Entscheidungsbaum 2.Grades liegt. Jedes der Zerlegungsdreiecke kennzeichnen wir mit einem Kringel, indem sich die Äste des Entscheidungsbaumes so verzweigen, daß jede Seite (mit Ausnahme der Grundseite im Grunddreieck) des Zerlegungsdreiecks von genau einem Ast geschnitten wird. Auf diese Weise erhalten wir für jede Polygonzerlegung eines m -Ecks genau einen Entscheidungsbaum 2.Grades mit $m - 1$ Endpunkten und umgekehrt.

Also ergibt die Anzahl der Entscheidungsbäume 2.Grades auch die Catalan-Zahlenfolge. Genauer gesagt gibt es C_n Entscheidungsbäume 2.Grades mit $n + 1$ Endpunkten.

5.3 2.1 \Leftrightarrow 2.5

Diese Äquivalenz ist auch sehr leicht einzusehen: Wir benennen die Endpunkte eines Entscheidungsbaumes 2.Grades alphabetisch durch und durchwandern den Entscheidungsbaum rückwärts hinab. So wie die Äste zueinander finden, klammern wir die Buchstaben:



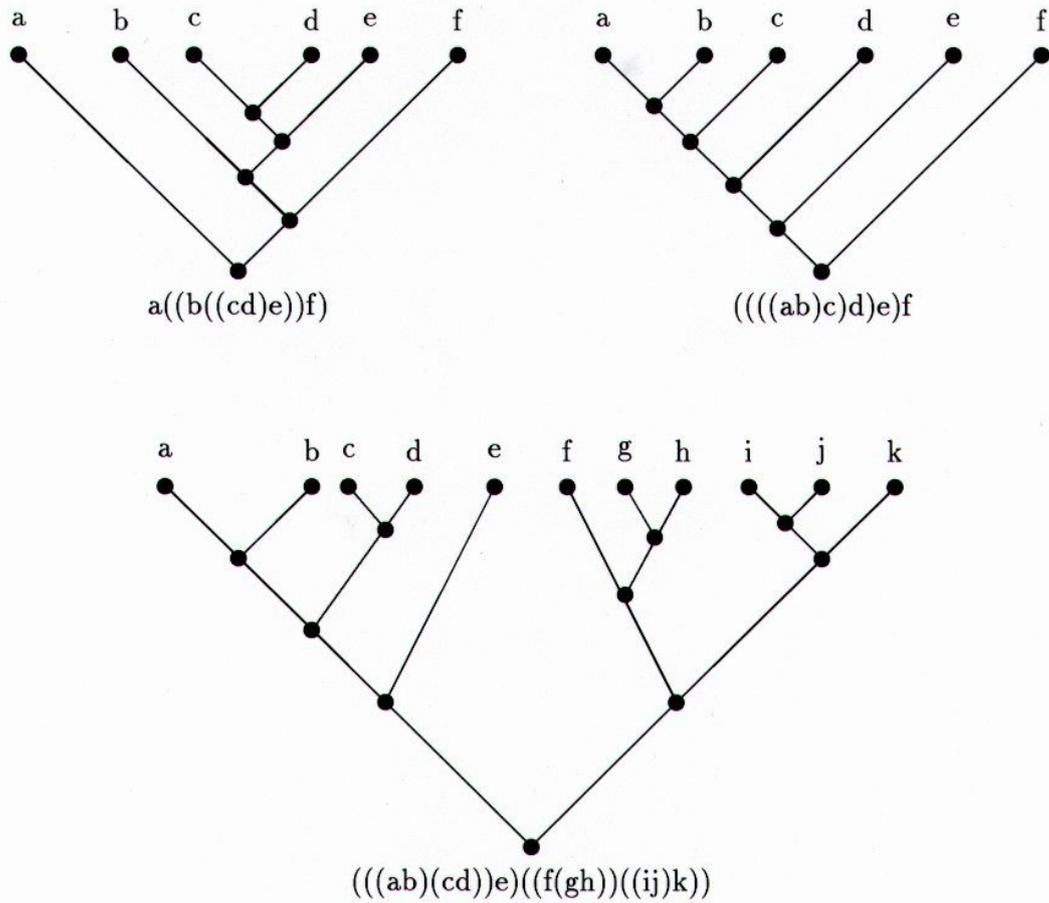


Abbildung 18: Bijektive Beziehung zwischen dem Catalanschen Problem und Entscheidungsbäumen 2.Grades

So können wir leicht jedem Entscheidungsbaum 2.Grades mit m Endpunkten ein paariges Produkt aus m verschiedenen alphabetisch geordneten Faktoren zuordnen. Diese Zuordnung ist eindeutig und funktioniert umgekehrt genauso.

Wieder sehen wir, daß deshalb die Zahl der Entscheidungsbäume 2.Grades mit $n + 1$ Endpunkten gleich der Catalan-Zahl C_n sein muß.

5.4 2.5 \Leftrightarrow 2.8

Wir können jedem Entscheidungsbaum 2.Grades mit $m + 1$ Endpunkten genau einen binären Suchbaum mit m Ecken - und umgekehrt - zuordnen. Dabei gehen wir folgendermaßen vor:

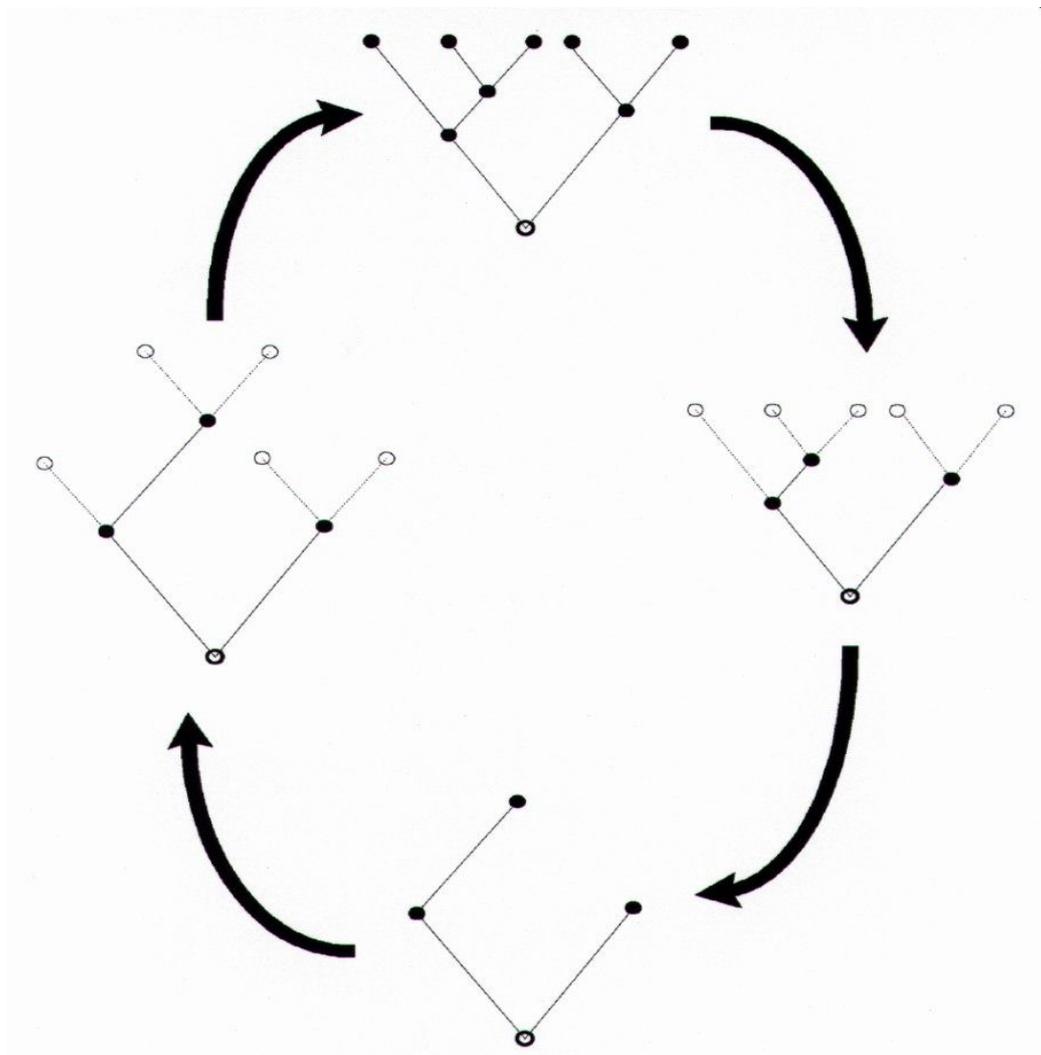


Abbildung 19: Bijektive Beziehung zwischen Entscheidungsbaum 2.Grades und binären Suchbäumen

Ausgangspunkt sei ein Entscheidungsbaum 2.Grades mit $m + 1$ Endpunkten. Wir schneiden diese Endpunkte mit den zugehörigen Ästen einfach ab und erhalten den binären Suchbaum mit m Ecken, der genau dem gewählten Entscheidungsbaum entspricht. Zurück gelangen wir mit der Vorschrift:

- Hat der Wurzelpunkt des binären Suchbaums keine zwei Äste, die von ihm weggehen, so sind Äste mit Endpunkten hinzuzufügen, bis dies der Fall ist.
- An jeden weiteren Punkt des binären Suchbaums sind soviel Äste mit Endpunkten hinzuzufügen, so daß ein Ast zu ihm hinführt und sich zwei Äste von ihm aus nach oben weiterverzweigen.

Weitere Beispiele zu besseren Verständnis:

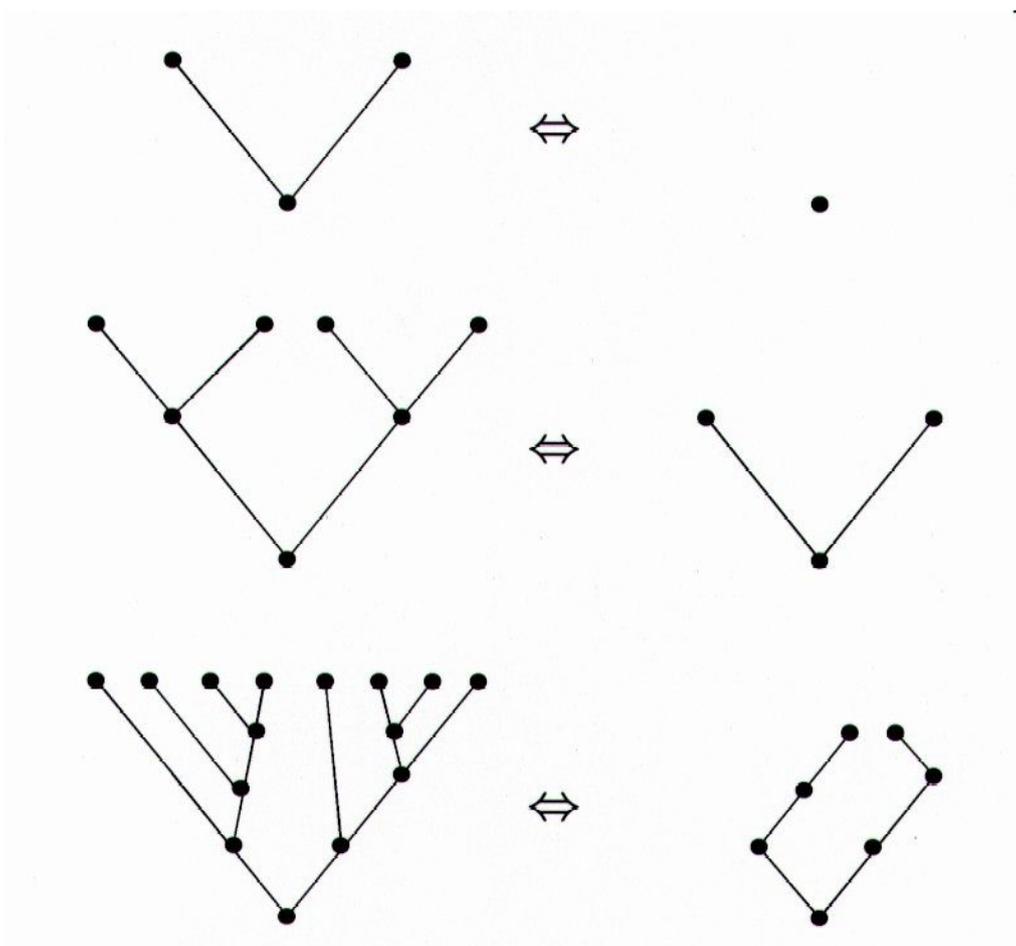


Abbildung 20: Weitere Beispiele für die bijektive Beziehung zwischen Entscheidungsbäumen 2.Grades und binären Suchbäumen

Also ist die Zahl der binären Suchbäume mit n Ecken gleich der Zahl der Entscheidungsbäume 2.Grades mit $n + 1$ Endpunkten gleich der Catalan-Zahl C_n .

5.5 2.5 \Leftrightarrow 2.7

Die Äquivalenz der Frage nach der Anzahl der trivalenten ebenen Wurzelbäume und der Frage nach der Anzahl der Entscheidungsbäume 2.Grades ist ganz leicht einzusehen:

Wir können jedem trivalenten Wurzelbaum mit $m - 1$ Verzweigungspunkten genau einen Entscheidungsbaum 2.Grades mit m Endpunkten zuordnen, indem wir die Wurzel weg lassen, den Baum um 45 Grad nach links drehen und die Äste zu den Endpunkten so verlängern, daß sie alle auf einer Linie enden. Genauso - nur rückwärts - können wir jedem Entscheidungsbaum 2.Grades genau einen trivalenten Wurzelbaum zuordnen:

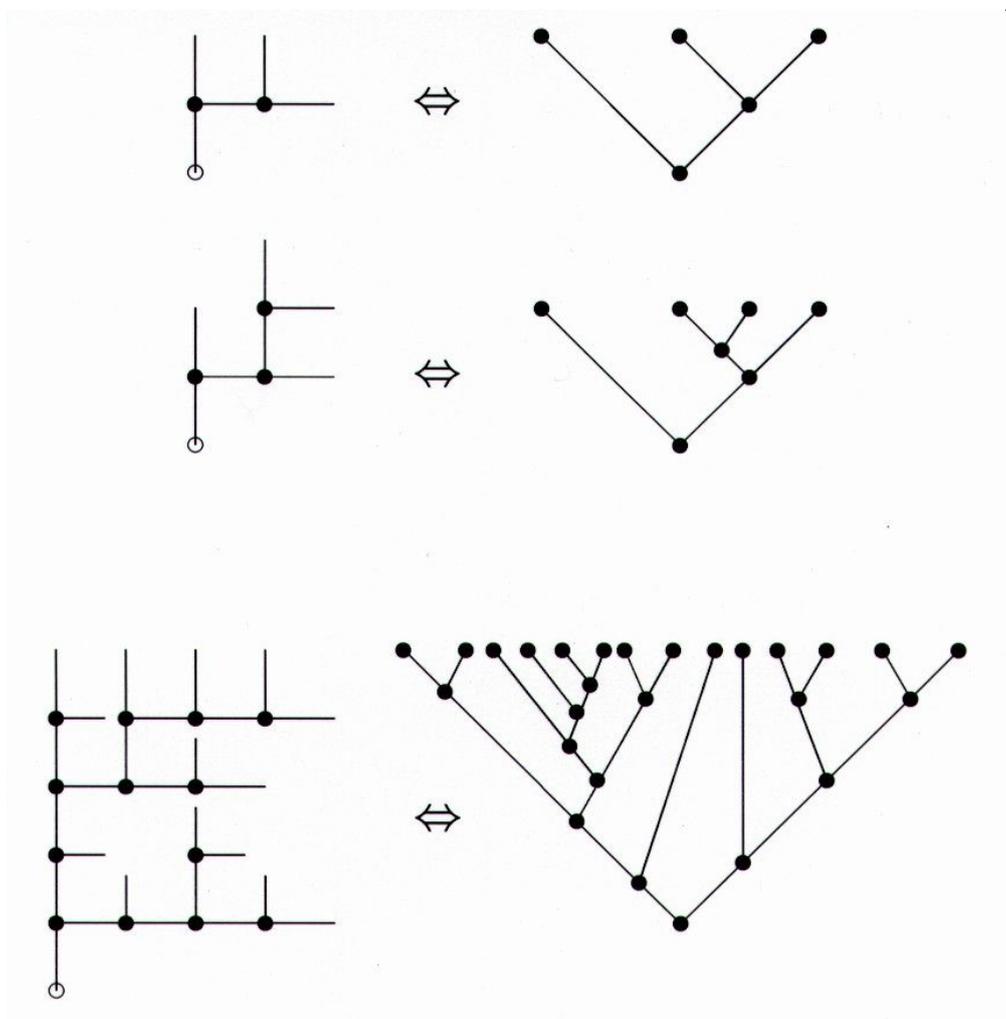


Abbildung 21: Bijektive Beziehung zwischen trivalenten ebenen Wurzelbäumen und Entscheidungsbäumen 2.Grades

Die Anzahl der trivalenten ebenen Wurzelbäume ist also auch durch die Catalan-Zahlenfolge gegeben (d.h. $C_n =$ Anzahl der trivalenten ebenen Wurzelbäume mit n Verzweigungspunkten).

5.6 2.7 \Leftrightarrow 2.6

Jedem trivalenten ebenen Wurzelbaum mit m Verzweigungspunkten können wir auf folgende Art und Weise genau einen ebenen Wurzelbaum mit m Ästen zuordnen und umgekehrt:

Wir gehen von einem trivalenten ebenen Wurzelbaum aus. An die Wurzel fügen wir nach unten noch eine Wurzel hinzu und verbinden alle Verzweigungspunkte und den Wurzelpunkt so wie in Abbildung 22 rechts durch die gestrichelten Linien dargestellt. Am besten gehen wir dabei "schichtweise" von unten nach oben durch den Wurzelbaum durch.

Der zugehörige ebene Wurzelbaum entsteht so aus den gestrichelten Linien.

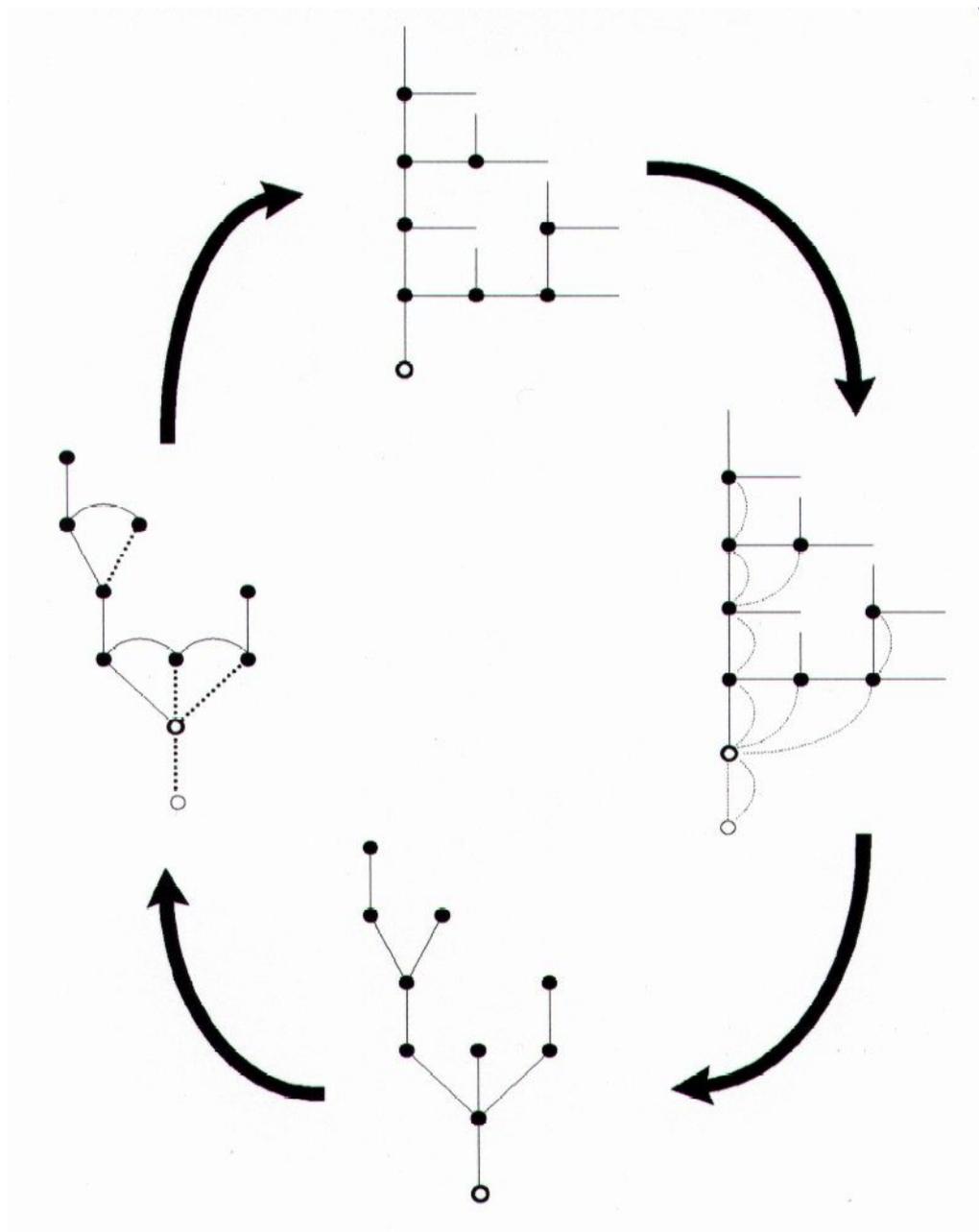


Abbildung 22: Bijektive Beziehung zwischen trivalenten ebenen Wurzelbäumen und ebenen Wurzelbäumen

Zurück zum trivalenten Wurzelbaum gelangen wir, in dem wir die Wurzel des ebenen Wurzelbaums abschneiden, und an jedem Verzweigungspunkt nur den linken Ast bestehen lassen, während die anderen wegfallen. Dafür verbinden wir die Punkte die direkt an dieser Verzweigung waren nun waagrecht miteinander (siehe Abbildung 22 links). Zuletzt vervollständigen wir diesen so erhalten Baum zum trivalenten ebenen Wurzelbaum, indem wir an jeden Punkt (außer am Wurzelpunkt) Verzweigungen anbringen, so daß zu jedem Punkt 1 Ast hinführt und 2 Äste wegführen.

Somit wären wir wieder beim Ausgangspunkt angelangt und haben damit gezeigt, daß auch die Anzahl der ebenen Wurzelbäume durch die Catalan-Zahlen gegeben ist. Genauer gesagt ist C_n gleich der Anzahl der ebenen Wurzelbäume mit n Ästen.

Weitere Beispiele zum besseren Verständnis:

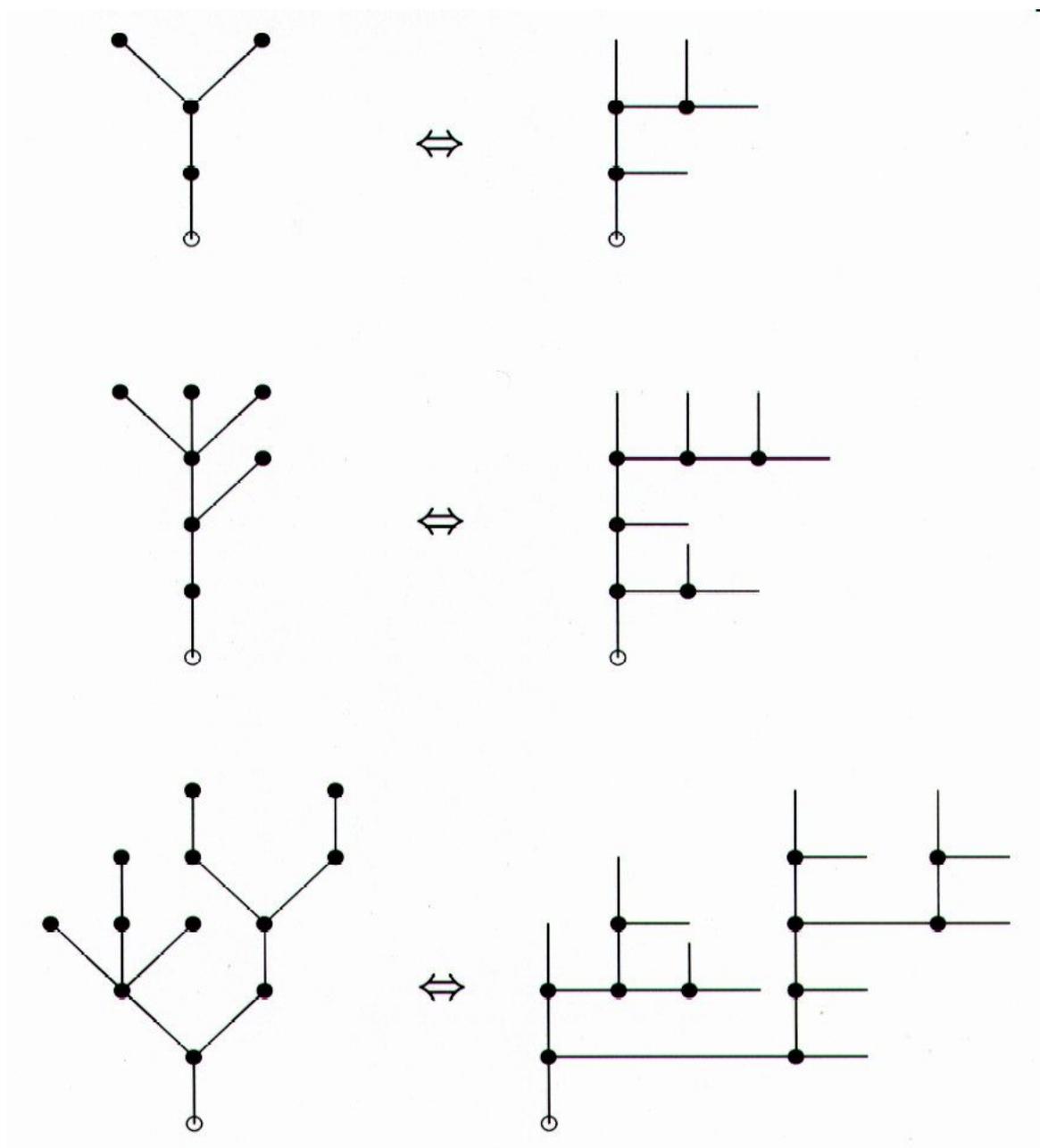


Abbildung 23: Weitere Beispiele für die Beziehung zwischen trivalenten ebenen Wurzelbäumen und ebenen Wurzelbäumen

5.7 2.6 \Leftrightarrow 2.9

Auch hier lässt sich die Äquivalenz am einfachsten mit Hilfe einer Abbildung erklären. Wir können jedem ebenen Wurzelbaum genau eine Zerlegung eines Kreises durch sich nicht schneidende paarweise Verbindungen einer geraden Anzahl von Punkten auf der Kreislinie zuordnen und umgekehrt:

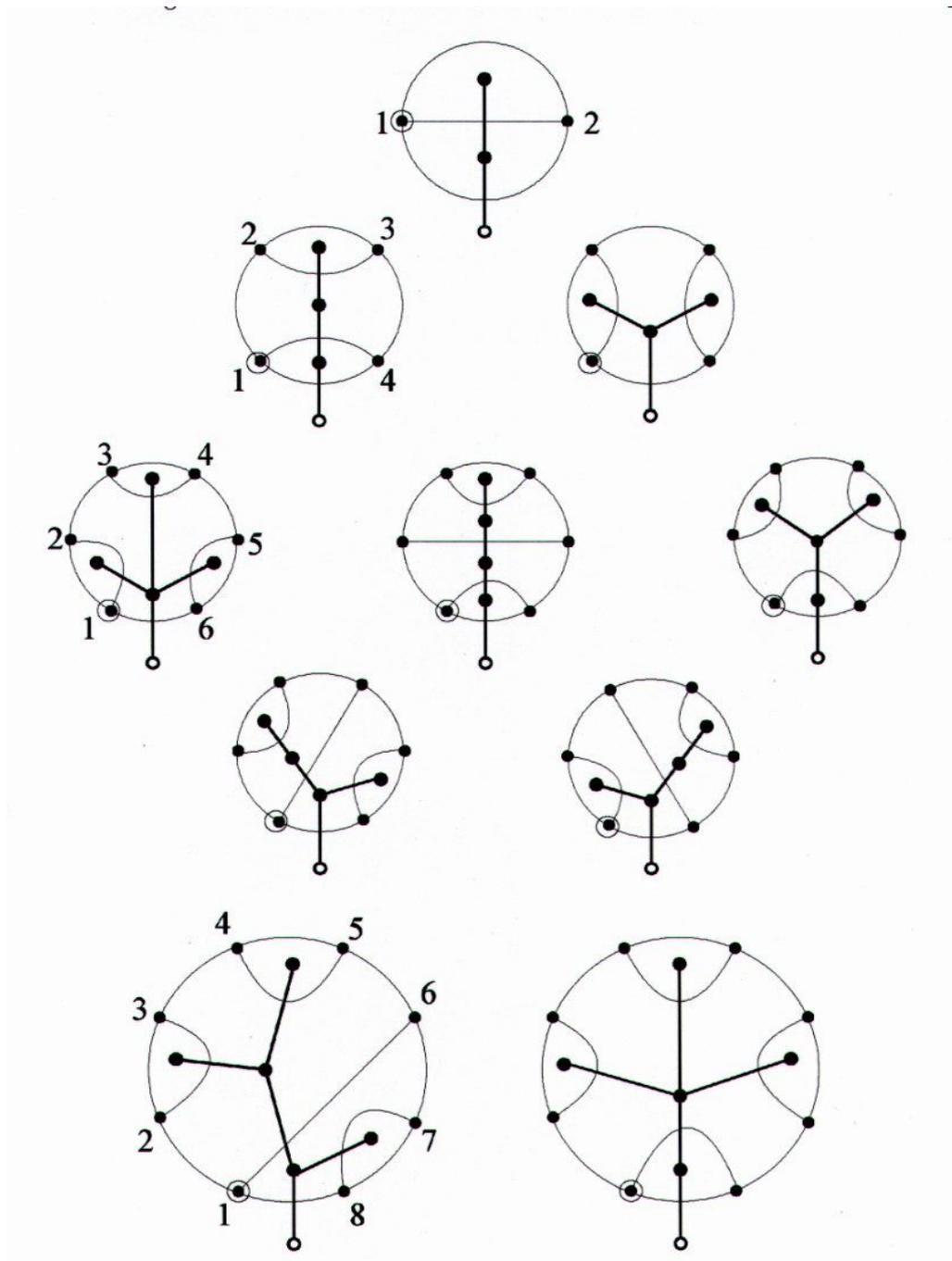


Abbildung 24: Bijektive Beziehung zwischen ebenen Wurzelbäumen und sich nicht schneidenden Verbindungen von Punkten auf einer Kreislinie
 Nehmen wir an, wir hätten einen Kreis mit $2m$ Punkten auf der Kreislinie, die paarweise miteinander innerhalb des Kreises nicht schneidend verbunden sind. Diese Punkte nummerieren wir im Uhrzeigersinn von 1 bis $2m$ durch. Das Kreisinnere wird durch die

Verbindungslinien in $m + 1$ Teilflächen zerlegt. Jede dieser Teilflächen markieren wir mit einem Punkt. Nun lassen wir einen ebenen Wurzelbaum so in den Kreis "hineinwachsen", daß die Wurzel die Kreislinie zwischen dem Punkt 1 und dem Punkt $2m$ überquert, und daß der Baum von Markierungspunkt zu Markierungspunkt der Teilflächen so "wächst", daß die Markierungspunkte benachbarter Teilflächen verbunden sind. So haben wir eine eindeutige Zuordnung in dieser Richtung definiert.

Andersherum gehen wir ähnlich vor: Um einen ebenen Wurzelbaum mit m Ästen herum ziehen wir eine Kreislinie mit $2m$ Punkten, so daß nur die Wurzel außerhalb des Kreises bleibt und die Kreislinie zwischen zwei Punkten schneidet. Gemäß der Verzweigung des Wurzelbaumes zerlegen wir nun den Kreis durch nicht schneidende Verbindungslien der Punkte auf dem Kreis so in Teilflächen, daß in jeder Teilfläche genau ein Verzweigungspunkt liegt und daß zusammenhängende Verzweigungspunkte benachbarten Teilflächen angehören. Eine Aufgabe, die bei höherer Ästeszahl ganz schön knifflig werden kann, aber trotzdem eindeutig bleibt.

Die Anzahl der Zerlegungen eines Kreises durch sich nicht schneidende paarweise Verbindungen von $2n$ Punkten auf der Kreislinie entspricht also der Anzahl der ebenen Wurzelbäume mit n Ästen und diese wiederum der Catalan-Zahl C_n .

5.8 2.9 \Leftrightarrow 2.10

Um diese Äquivalenz zu zeigen, gehen wir folgendermaßen vor:

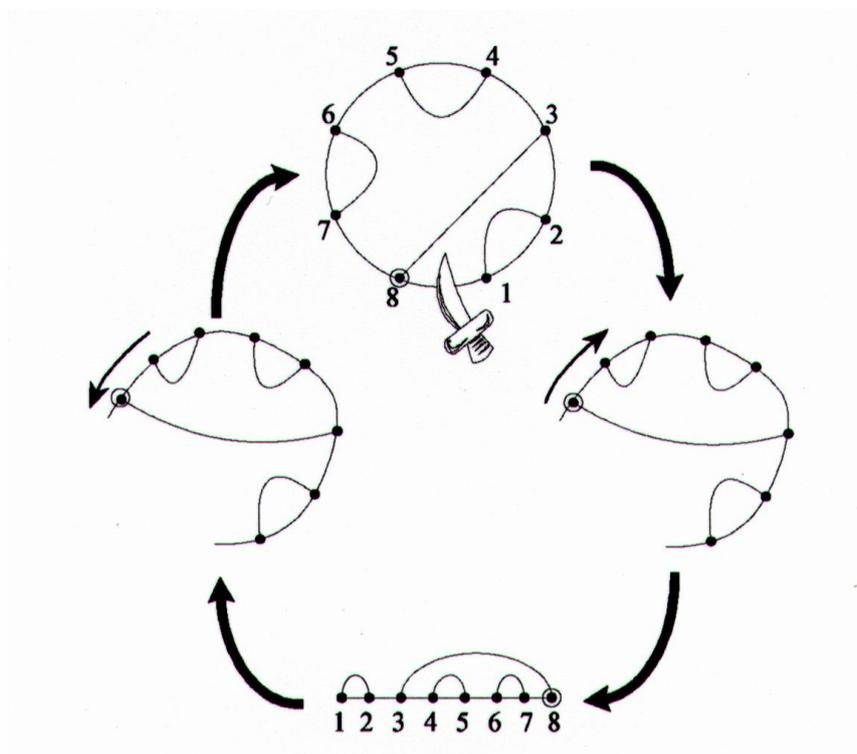
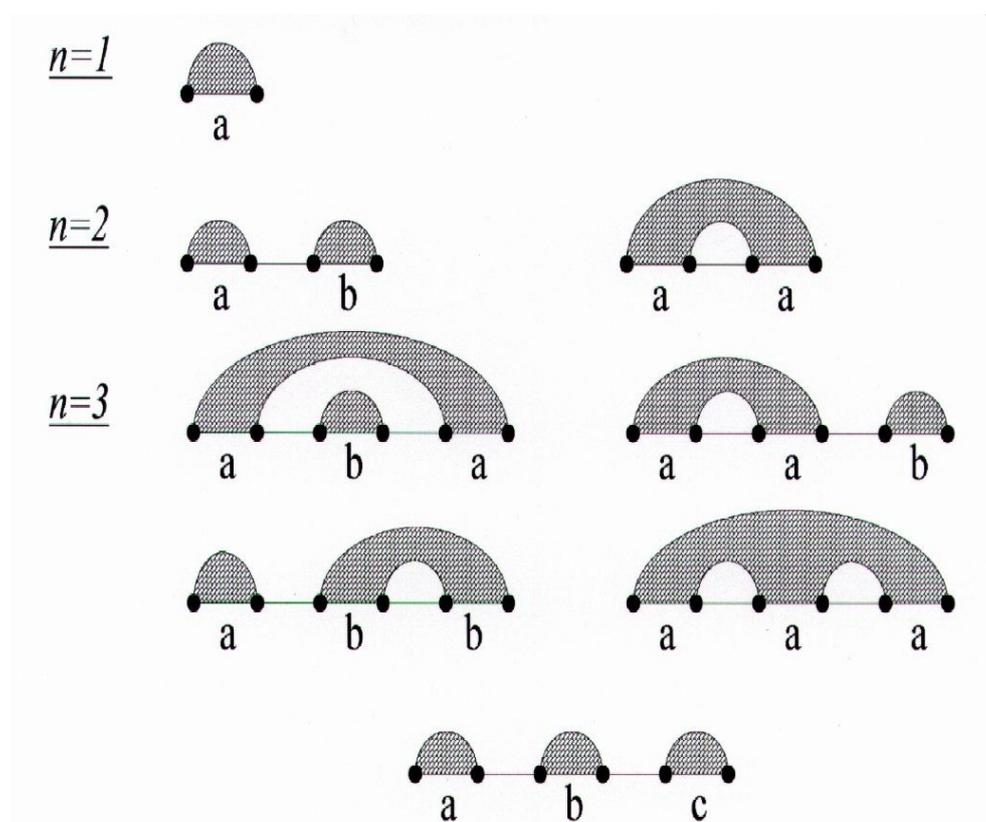


Abbildung 25: Bijektive Beziehung zwischen sich nicht schneidenden Verbindungen von Punkten auf einer Kreislinie und sich nicht schneidenden Verbindungen von genausovielen Punkten auf einer Linie

Wir schneiden den Kreis aus 5.7, der diesmal andersherum numeriert ist, an einer Stelle der Kreislinie zwischen Punkt $2m$ und Punkt 1 einfach auseinander und biegen ihn zu einer Linie ohne dabei die Verbindungslinien der Punkte zu trennen. Umgekehrt biegen wir die Linie wieder zum Kreis zusammen. So erhalten wir eine bijektive Zuordnung. Die Anzahl der Möglichkeiten $2n$ Punkte auf einer Linie oberhalb der Linie nicht schneidend paarweise zu verbinden ist also gleich der Anzahl der Möglichkeiten $2n$ Punkte auf einem Kreis paarweise nicht schneidend innerhalb des Kreises zu verbinden, welche wiederum gleich C_n ist.

5.9 2.10 \Leftrightarrow 2.11

Jeder dieser Möglichkeiten, $2n$ Punkte auf einer Linie paarweise nicht schneidend oberhalb der Linie zu verbinden, können wir folgendermaßen genau ein planares Reimschemata eines n -zeiligen Verses zuordnen und umgekehrt:



$n=4$

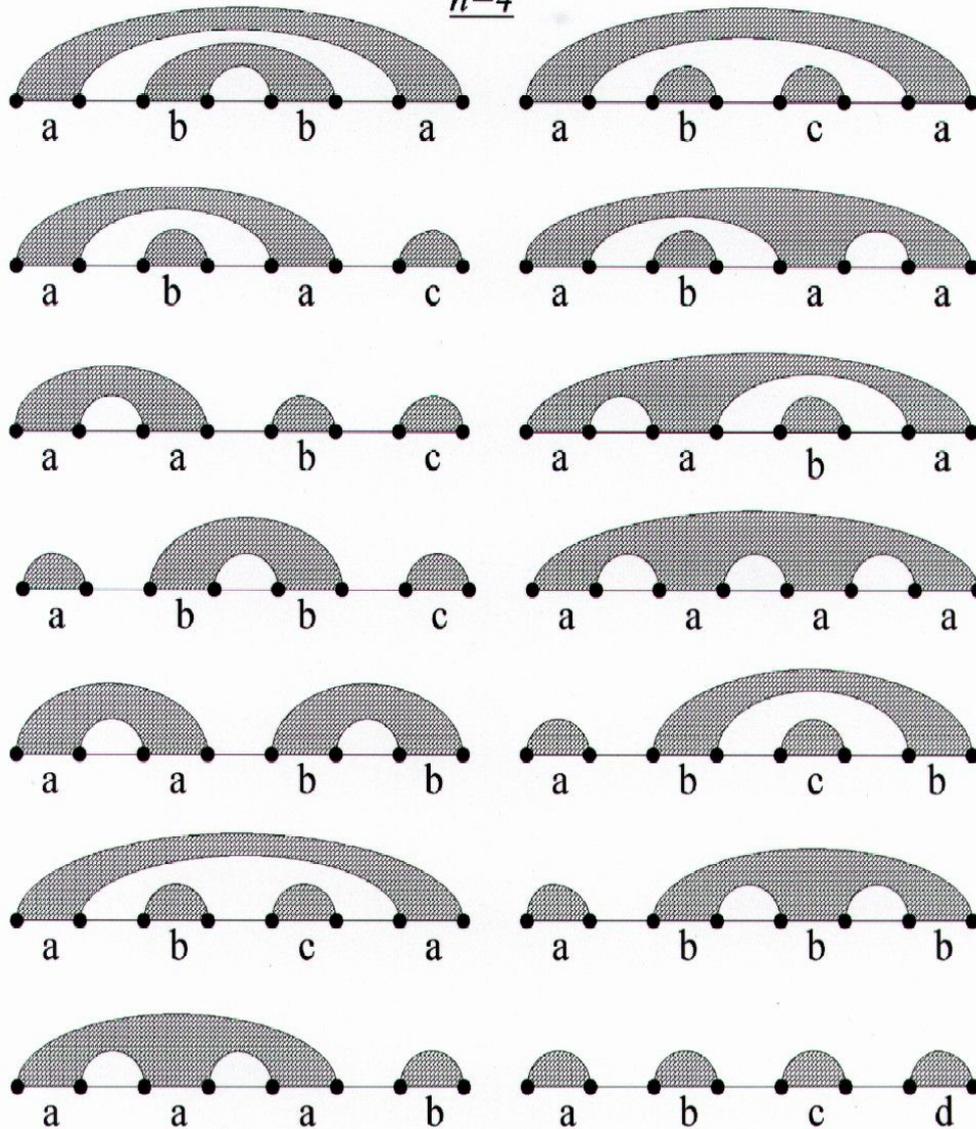
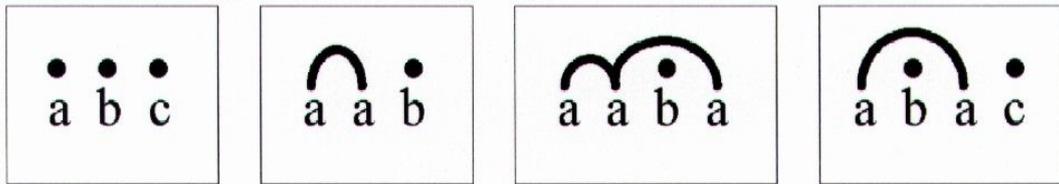


Abbildung 26: Bijektive Beziehung zwischen sich nicht schneidenden paarweisen Verbindungen von Punkten auf einer Linie und planaren Reimschemata

Wir malen von oben herkommend die Zwischenräume der Verbindungslinien abwechselnd aus bzw. lassen sie frei. So entsteht in jedem Fall ein Bild, das sich leicht einem bestimmten Reimschema zuordnen läßt. Deswegen möchte ich es "Reimbild" nennen. Verbindungsbögen (nicht die Verbindungslinien, sondern die ausgemalten Zwischenräume der Verbindungslinien) im Reimbild kennzeichnen Zeilen des Verses mit gleichen Reimen, einzelne ausgemalte Bereiche kennzeichnen isolierte Reime, die nur genau einmal im Vers auftauchen. Beim Identifizieren eines Reimbilds gehen wir von links nach rechts gemäß unserer Schreibrichtung vor und kennzeichnen die Reime alphabetisch durch. Vom Reimschema zurück zum Reimbild und somit zu den Verbindungsbild der Punkte auf einer Linie gelangen wir ganz einfach, indem wir die Reime mit Bögen und Punkte analog zu oben kennzeichnen



und diese Bilder wieder rückwärts übersetzen.

Somit haben wir wieder eine Bijektion und die Anzahl der planaren Reimschemata eines n -zeiligen Verses ist C_n .

5.10 2.10 \Rightarrow 2.12

In diesem Unterkapitel beschreibe ich nur eine Zuordnungsmöglichkeit in einer Richtung - also keine Bijektion. Letztlich wird sich aber der Kreis der Zuordnungen (siehe Beweisschema, Abbildung 15) schließen und so haben wir dann doch eine Äquivalenz der Probleme 2.10 und 2.12 gezeigt.

Hier nun will ich jeder Möglichkeit, $2n$ Punkte auf einer Linie paarweise nicht schneidend oberhalb der Linie zu verbinden, genau eine Möglichkeit, $2n$ Menschen paarweise verschiedener Größe in 2 Reihen so aufzustellen, daß jede Reihe der Größe nach geordnet ist und daß jede Person in der ersten Reihe größer ist als die entsprechende Person in der zweiten Reihe, zuordnen.

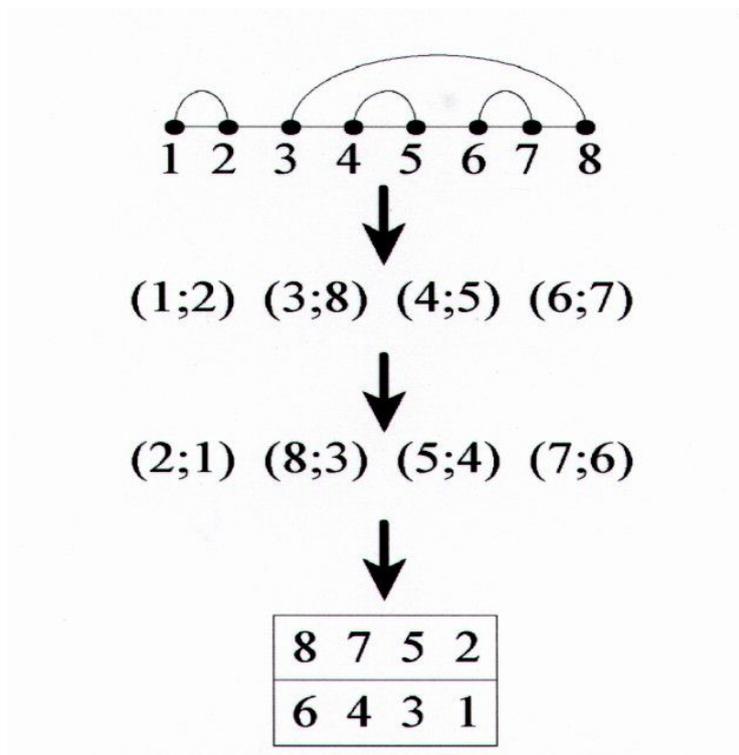


Abbildung 27: Zuordnung von sich nicht schneidenden paarweisen Verbindungen von Punkten auf einer Linie auf eine Möglichkeit eine geordnete Menge gerader Mächtigkeit in zwei Reihen geordnet aufzustellen.

Dabei gehen wir so vor:

Wir numerieren die Punkte auf der Linie von 1 bis $2n$ durch und klammern die Nummern ihrer Verbindung entsprechend zu Paaren. Die Paare ordnen wir jedes für sich der Größe nach, so daß die größere Nummer vorne steht. Nun nehmen wir alle Nummern, die in den Paaren vorne stehen und setzen sie in die erste Reihe. Die anderen kommen in die zweite Reihe. Nachdem wir jetzt noch jede Reihe für sich der Größe nach geordnet haben, so daß die größte Nummer vorne steht, haben wir eine von uns gewünschte Anordnung erreicht. Diese Zuordnung ist eindeutig.

5.11 2.12 \Leftrightarrow 2.13

Nun können wir auch noch jeder Möglichkeit, $2n$ Menschen paarweise verschiedener Größe in 2 Reihen so aufzustellen, daß jede Reihe der Größe nach geordnet ist und daß jede Person in der ersten Reihe größer ist als die entsprechende Person in der zweiten Reihe, genau eine Sequenz aus 2.13 (Vorwärts- und Rückwärtsschritte) zuordnen und umgekehrt. Dabei gehen wir folgendermaßen vor:

Die Nummern der ersten Reihe bezeichnen die Positionen der Sequenz, wo eine Null zu stehen hat. Die Nummern der zweiten Reihe bezeichnen die Positionen der Sequenz, wo eine Eins zu stehen hat. Hierbei sind die Positionen der Sequenzen von links nach rechts aufsteigend durchnummeriert.

Umgekehrt schreiben wir jede Position der Sequenz, an der eine Null steht, in die erste Reihe und jede Position, an der eine Eins steht, in die zweite Reihe. Anschließend ordnen wir die Reihen jeweils noch der Größe nach.

- $n = 1$:

Positionen der "0"	2
Positionen der "1"	1
Sequenz	10

- $n = 2$:

4 3	4 2
2 1	3 1
1100	1010

- $n = 3$:

6 5 4	6 5 3	6 5 2	6 4 3	6 4 2
3 2 1	4 2 1	4 3 1	5 2 1	5 3 1
111000	110100	101100	110010	101010

- $n = 4$:

8 7 6 5	8 7 6 4	8 7 6 3	8 7 6 2	8 7 5 4
4 3 2 1	5 3 2 1	5 4 2 1	5 4 3 1	6 3 2 1
11110000	11101000	11011000	10111000	11100100
8 7 5 3	8 7 5 2	8 7 4 3	8 7 4 2	8 6 5 4
6 4 2 1	6 4 3 1	6 5 2 1	6 5 3 1	7 3 2 1
11010100	10110100	11001100	10101100	11100010
8 6 5 3	8 6 5 2	8 6 4 3	8 6 4 2	
7 4 2 1	7 4 3 1	7 5 2 1	7 5 3 1	
11010010	10110010	11001010	10101010	
- ... usw.

5.12 2.13 \Leftrightarrow 2.9

Jetzt will ich zeigen, wie wir jeder Zerlegung eines Kreises durch sich nicht schneidende paarweise Verbindungen einer geraden Anzahl von Punkten auf der Kreislinie eine Sequenz aus 2.13 (Vorwärts- und Rückwärtsschritte) zuordnen können und umgekehrt:

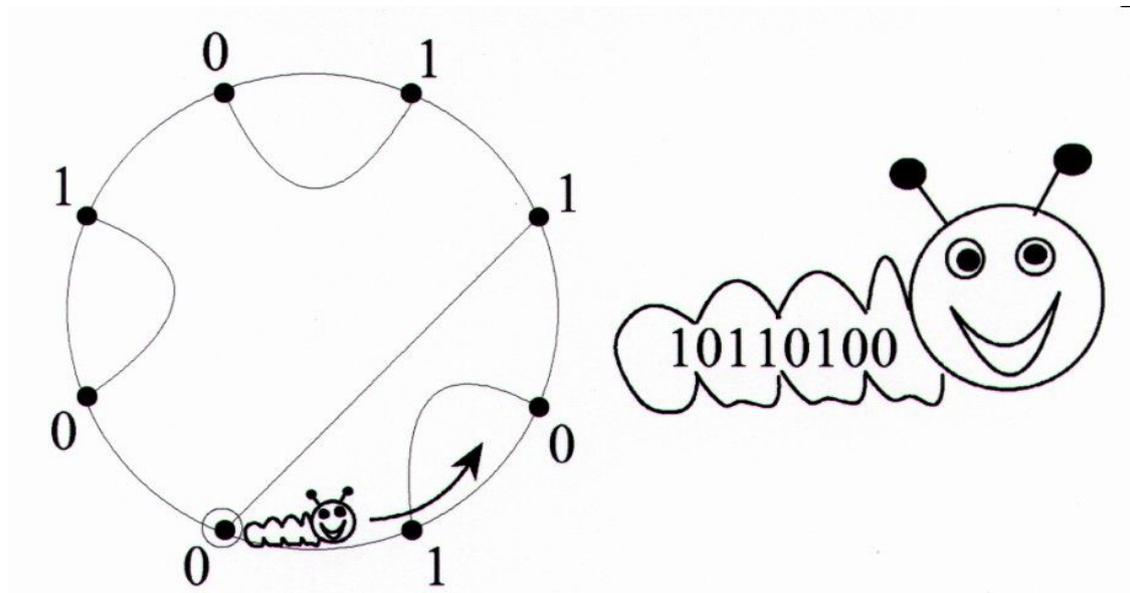


Abbildung 28: Zuordnung von einer Zerlegung eines Kreises durch sich nicht schneidenden paarweisen Verbindungen von Punkten auf der Kreislinie zu einer Sequenz von Vorwärts- und Rückwärtsschritten

Wir stellen uns vor, ein Wurm krabbelt auf der Innenseite der Kreislinie gegen den Uhrzeigersinn entlang und jedesmal wenn er eine Verbindungslinie zum erstenmal überschreitet, notieren wir eine "1", und wenn er eine Verbindungslinie zum zweitenmal überschreitet eine "0". Der Wurm beginnt rechts von dem gekennzeichneten Punkt, den wir zur Orientierung festgelegt haben. So erhalten wir die zugehörige Zahlensequenz der Vorwärts- und Rückwärtsschritte.

Umgekehrt funktioniert diese Zuordnung rückwärts: Der Wurm durchkrabbelt seinen Kreisweg rückwärts und an jedem Punkt "spuckt" er die Einsen und Nullen in umgekehrter Reihenfolge wieder aus. Es gibt nur eine Möglichkeit die so gekennzeichneten Punkte auf der Kreislinie paarweise nicht schneidend zu verbinden, so daß jede "1" mit einer "0" verbunden wird.

Somit haben wir eine Bijektion definiert. Die Anzahl der verschiedenen Schrittfolgen, um mit $2n$ Vorwärts- und Rückwärtsschritten wieder am Ausgangspunkt zu stehen, ist also auch gleich C_n .

Auch die Anzahl der Möglichkeiten auf die Frage 2.12 ($2n$ Menschen in zwei Reihen) ist aufgrund 5.11 gleich C_n .

5.13 2.6 \Leftrightarrow 2.13

Wir können jedem ebenen Wurzelbaum auf folgende Art und Weise eine Sequenz von Vorwärts- und Rückwärtsschritten, so daß wir wieder zum Ausgangspunkt zurück gelangen, zuordnen und umgekehrt:

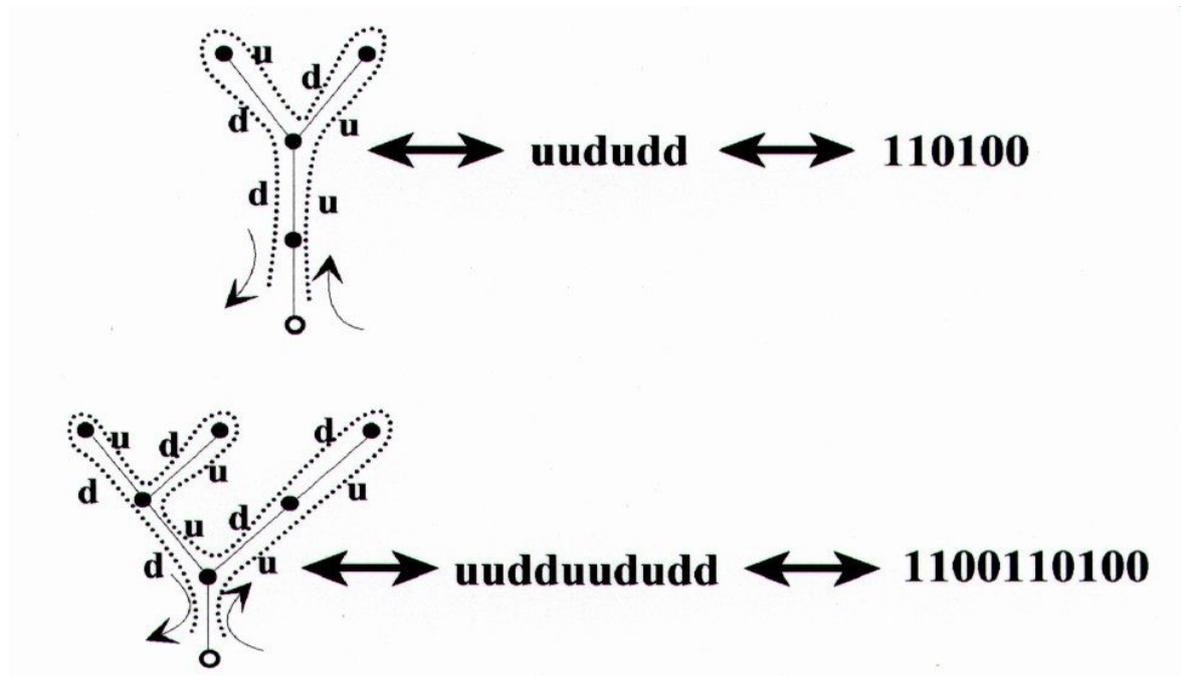


Abbildung 29: Bijektion zwischen ebenen Wurzelbäumen und Sequenzen von Vorwärts- und Rückwärtsschritten

Dabei "durchkrabbeln" wir den ganzen Wurzelbaum ohne Wurzel. Wir beginnen auf der rechten Seite des Baumes und notieren ein "u" (für up), wenn wir an einem Ast nach oben krabbeln und ein "d" (für down), wenn wir an einem Ast nach unten krabbeln. Wieder unten angelangt, haben wir somit eine Sequenz von u's und d's, die wir ganz einfach in eine Sequenz aus "1" und "0" verwandeln: $u \hat{=} 1$, $d \hat{=} 0$.

Umgekehrt zeichnen wir den ebenen Wurzelbaum mit der Sequenz aus u's und d's als Anleitung.

5.14 2.5 \Leftrightarrow 2.13

Ähnlich gehen wir vor, um jedem Entscheidungsbaum genau eine Sequenz aus Vorwärts- und Rückwärtsschritten zuzuordnen und umgekehrt:

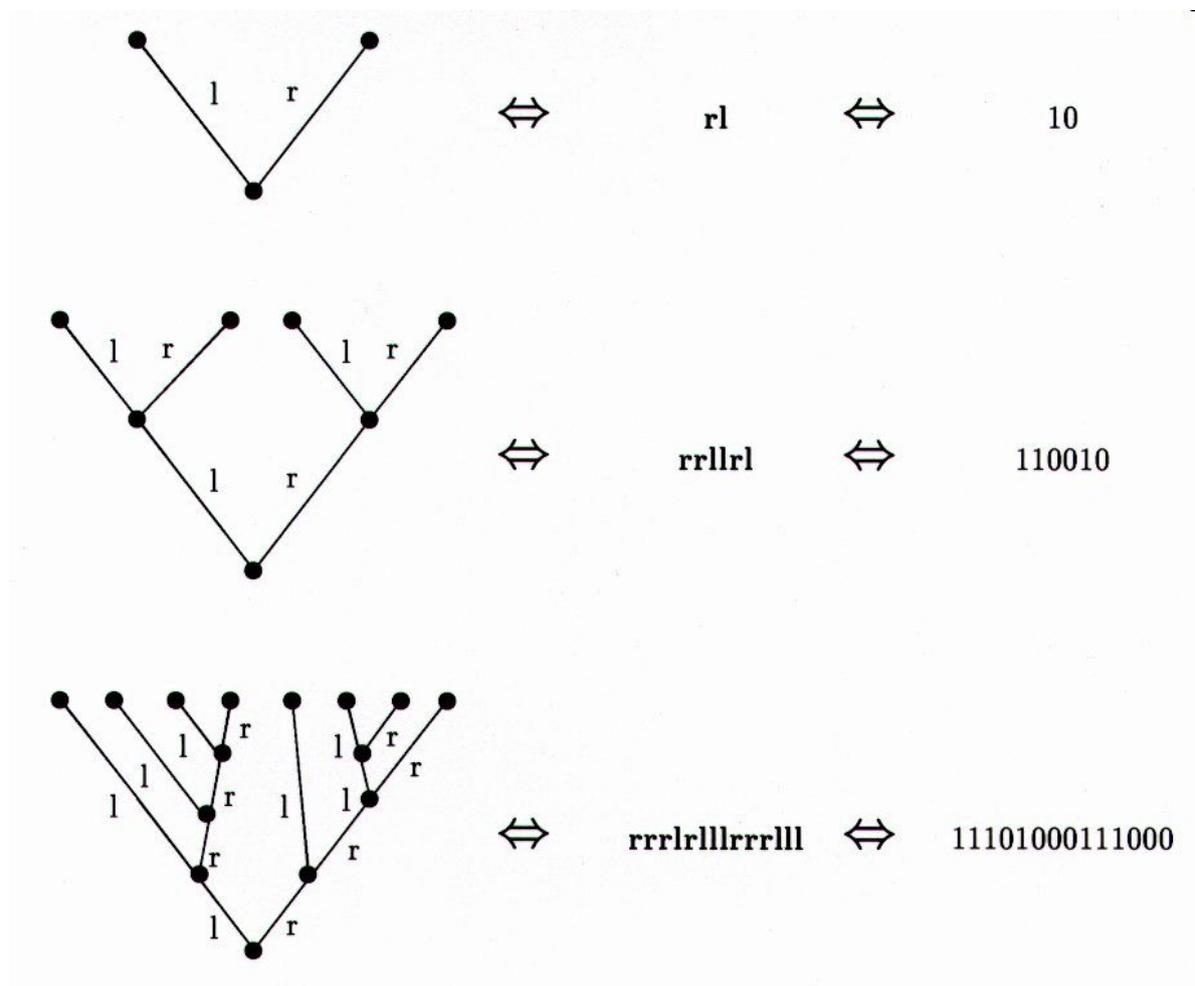


Abbildung 30: Bijektion zwischen Entscheidungsäumen und Sequenzen von Vorwärts- und Rückwärtsschritten

Wieder "durchkrabbeln" wir den ganzen Entscheidungsbaum wie oben. Wir beginnen auf der rechten unteren Seite des Baumes und notieren ein "r", wenn wir an einem Ast krabbeln, der nach rechts zeigt und ein "l", wenn wir an einem Ast krabbeln, der nach links zeigt. Dabei wird jeder Ast nur einmal gezählt, das heißt nur beim ersten Erreichen eines Astes wird ein "r" oder "l" notiert. Wieder unten angekommen, haben wir somit eine Sequenz von r's und l's, die wir ganz einfach in eine Sequenz aus "1" und "0" verwandeln: $r \hat{=} 1, l \hat{=} 0$.

Umgekehrt zeichnen wir den ebenen Wurzelbaum mit der Sequenz aus r's und l's als Anleitung.

5.15 2.3 \Leftrightarrow 2.13

Diese Äquivalenz ist sehr einsichtig. Wir brauchen nur jedem Rechtsschritt auf einem minimalen Gitterweg einen Vorwärtsschritt "1" und jedem Schritt nach oben auf einem Gitterweg einen Rückwärtsschritt "0" zuordnen und umgekehrt. So erhalten wir eine Bijektion zwischen den Antwortmengen dieser beiden Fragestellungen.

Die Anzahl der Möglichkeiten, um nach $2n$ Vorwärts- und Rückwärtsschritten wieder in die Ausgangsposition zurückzukommen, ist demnach genauso groß wie die Anzahl der minimalen Gitterwege vom Punkt $(0,0)$ nach (n,n) ohne Überschreitung der Winkelhalbierenden (diese Wege bestehen auch aus $2n$ Schritten) und diese wiederum also auch gleich C_n .

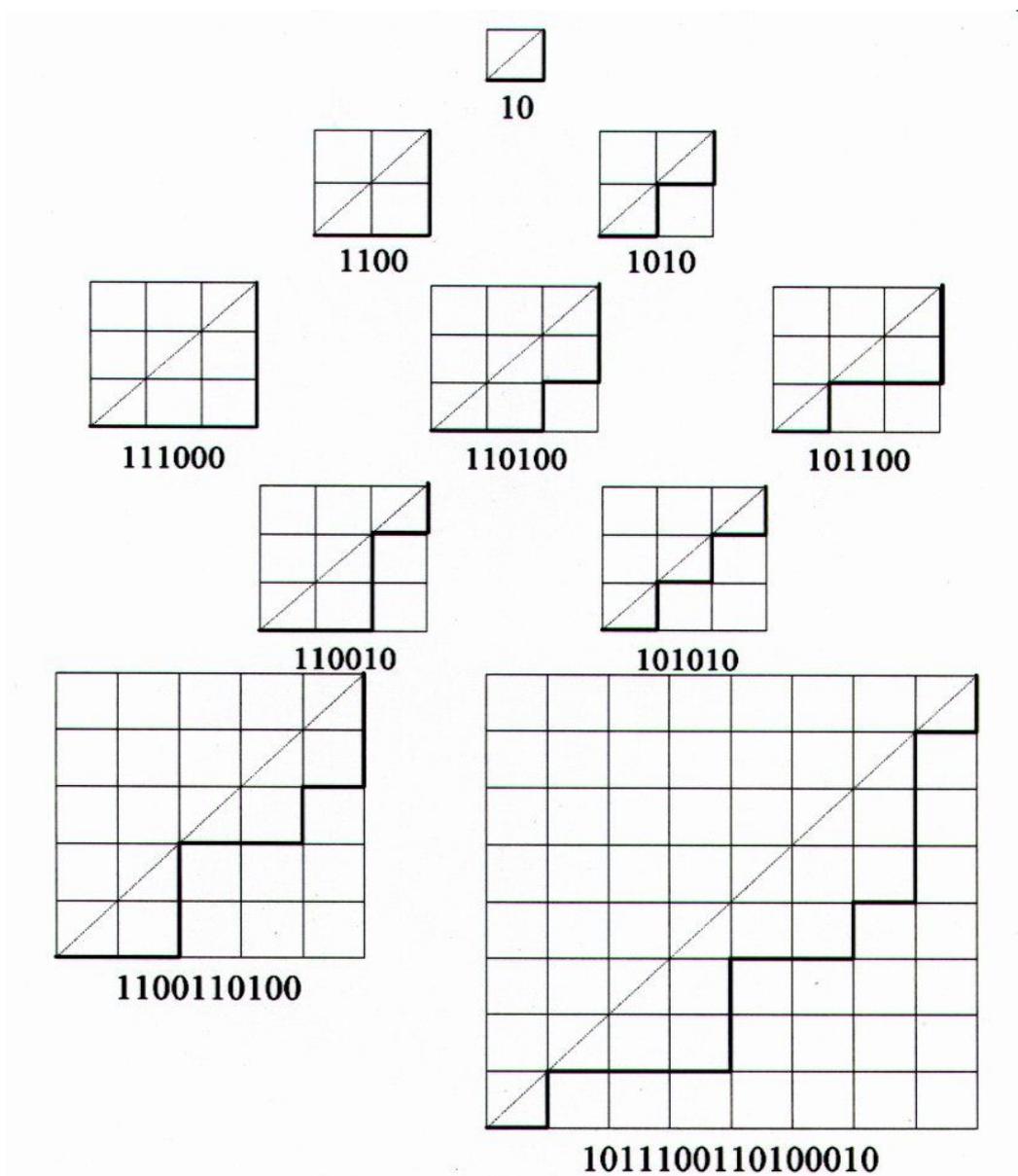


Abbildung 31: Zeichnerische Veranschaulichung der bijektiven Zuordnung einer Sequenz von Vorwärts- und Rückwärtsschritten zu genau einem minimalen Gitterweg

5.16 2.3 \Leftrightarrow 2.4

Jedem minimalen Gitterweg von Punkt $(0, 0)$ nach (n, n) ohne Überschreitung der Winkelhalbierenden läßt sich genau ein Term zuordnen, der beim Ausmultiplizieren von

$$x_1 \cdot (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \cdot \dots \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$$

entsteht:

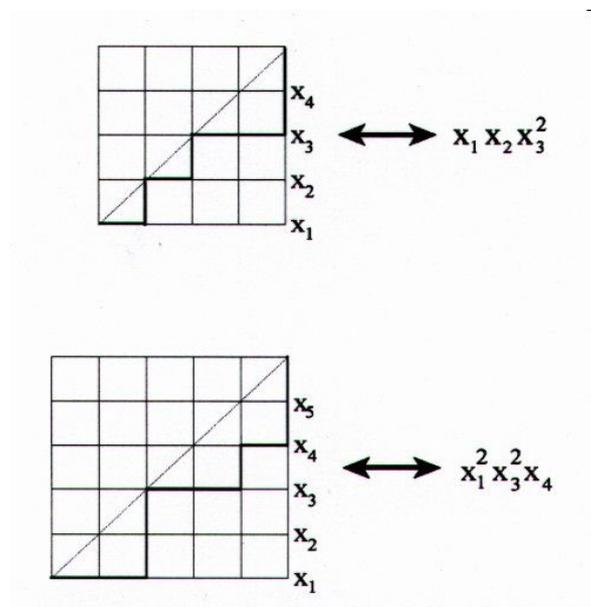


Abbildung 32: Veranschaulichung der bijektiven Zuordnung eines Terms der obigen Form zu genau einem minimalen Gitterweg

Die waagrechten Gitterlinie benennen wir von unten nach oben mit x_1, x_2, \dots, x_n durch. Die oberste waagrechte Gitterlinie bleibt unbenannt.

Von einem Gitterweg ausgehend, können wir nun ganz einfach den zugehörigen Term herauslesen, indem wir die waagrechten Schritte des Gitterwegs jeweils als einen Faktor verstehen, dessen Name die waagrechte Gitterlinie hat.

Umgekehrt können wir aus den Exponenten der Faktoren x_1, x_2, \dots, x_n des Terms jeweils herauslesen, wieviele waagrechte Schritte der Gitterweg auf der jeweiligen waagrechten Gitterlinie haben muß.

Daher ist also die Anzahl der Terme, die beim Ausmultiplizieren des obigen Ausdrucks entstehen, auch gleich C_n .

Dies können wir auch direkt beweisen (nach [8]):

Jeder Term der beim Ausmultiplizieren von

$$x_1 \cdot (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \cdot \dots \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$$

entsteht, hat die Form

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$$

wobei für die nichtnegativen ganzen Zahlen a_i gilt:

$$\begin{aligned}
a_n &\leq 1 \\
a_{n-1} + a_n &\leq 2 \\
a_{n-2} + a_{n-1} + a_n &\leq 3 \\
&\dots \\
a_2 + a_3 + \dots + a_n &\leq n - 1 \\
a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n &= n
\end{aligned} \tag{30}$$

Andersherum gibt es für jede Auswahl nichtnegativer ganzer Zahlen, welche diese Bedingungen erfüllen, einen Term der obigen Form mit diesen ganzen Zahlen als Exponenten.

Sei F_n die Anzahl der Terme. Es ist klar, daß $F_1 = 1$ und $F_2 = 2$.

Betrachten wir die Möglichkeit, in der die erste Gleichheit in der oberen Ungleichungskette in der r -ten Zeile auftaucht. Das heißt also:

$$\begin{aligned}
a_n &< 1 \\
a_{n-1} + a_n &< 2 \\
a_{n-2} + a_{n-1} + a_n &< 3 \\
&\dots \\
a_{n-r+2} + \dots + a_n &< r - 1 \\
a_{n-r+1} + a_{n-r+2} + \dots + a_n &= r
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
a_n &= 0 \\
a_{n-1} &\leq 1 \\
a_{n-2} + a_{n-1} &\leq 2 \\
&\dots \\
a_{n-r+2} + \dots + a_{n-1} &\leq r - 2 \\
a_{n-r+1} + a_{n-r+2} + \dots + a_{n-1} &= r
\end{aligned} \tag{31}$$

Für die anderen ganzen Zahlen a_i ($i = 1, 2, \dots, n - r$) gilt nach (30)

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-r} = n - r$$

und

$$\begin{aligned}
a_1 &\geq 1 \\
a_1 + a_2 &\geq 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 &\geq 3 \\
&\dots \\
a_1 + a_2 + \dots + a_{n-r-2} &\geq n - r - 2 \\
a_1 + a_2 + \dots + a_{n-r-2} + a_{n-r-1} &\geq n - r - 1
\end{aligned}$$

Deswegen muß gelten:

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \dots + a_{n-r} &= n - r \\
a_2 + \dots + a_{n-r} &\leq n - r - 1 \\
a_3 + \dots + a_{n-r} &\leq n - r - 2 \\
&\dots \\
a_{n-r-2} + a_{n-r-1} + a_{n-r} &\leq 3 \\
a_{n-r-1} + a_{n-r} &\leq 2 \\
a_{n-r} &\leq 1
\end{aligned} \tag{32}$$

Ist $r = 1$, d.h. $a_n = 1$, so gibt es F_{n-1} Möglichkeiten, die nichtnegativen ganzen Zahlen a_1, a_2, \dots, a_{n-1} auszuwählen, um die Ungleichungen (32) zu erfüllen.

Ist $r = n$, d.h. $a_n = 0$, so gibt es F_{n-1} Möglichkeiten, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} auszuwählen, um (31) zu erfüllen.

Ist $1 < r < n$, d.h. $a_n = 0$, so gibt es F_{r-1} Möglichkeiten (31) zu erfüllen und F_{n-r} Möglichkeiten (32) zu erfüllen. Mit der Konvention, daß $F_0 = 1$ folgt:

$$F_n = \sum_{r=0}^{n-1} F_r F_{n-r-1} \tag{33}$$

Diese Rekursionsformel (33) kennen wir bereits schon aus dem Kapitel 4. Die Rekursionsformel (12) für die Catalan-Zahlen ist die gleiche und da mit $F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2$ dieselben Startwerte gegeben sind gilt $F_n = C_n$, was zu beweisen war.

5.17 2.13 \Leftrightarrow 2.14

Wir wollen nun zeigen, daß jeder Zahlensequenz, in der jede Zahl Teiler der Summe ihrer beiden Nachbarn ist (siehe 2.14), genau eine Sequenz aus Vorwärts- und Rückwärtsschritten zugeordnet werden kann und umgekehrt (nach [6]).

Dazu betrachten wir die Zahlensequenz $1, a_1, a_2, \dots, a_n, 1$ genauer.

Für die a_i soll gelten:

$$a_i \in \mathbb{N}, a_i > 1 \text{ und } a_i | (a_{i-1} + a_{i+1}) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (a_0 := 1, a_{n+1} := 1)$$

Nehmen wir an, es wäre $a_i = a_{i+1}$ für ein beliebiges $i \in \{0, \dots, n\}$.

Also ist $a_i | (a_{i-1} + a_i)$ und $a_i | (a_i + a_{i+2})$.

Das bedeutet $a_i | a_{i-1}$ und $a_i | a_{i+2}$.

Da aber $a_{i-1} | (a_{i-2} + a_i)$ und $a_{i+2} | (a_i + a_{i+3})$, ist auch $a_i | a_{i-2}$ und $a_i | a_{i+3}$.

Diese Teilereigenschaft setzt sich nun für alle a_j fort, so daß wir letztendlich hätten:
 $a_i | a_j \quad \forall j \in \{0, \dots, n+1\}$.

Daraus würde folgen: $a_j = 1 \quad \forall j \in \{0, \dots, n+1\}$ im Widerspruch zu $a_j > 1$ für $j \in \{1, \dots, n\}$.

Also gibt es mindestens ein a_i (für $i \in \{1, \dots, n\}$), so daß $a_{i-1} < a_i$ und $a_i > a_{i+1}$.

Wegen $a_i | (a_{i-1} + a_{i+1})$ folgt daraus $a_{i-1} + a_{i+1} = a_i$.

Dann gilt : $a_{i+1} + a_{i-2} = a_i - a_{i-1} + a_{i-2}$ und $a_{i-1} + a_{i+2} = a_i - a_{i+1} + a_{i+2}$.

Wegen $a_{i-1} | (a_i + a_{i-2})$ und $a_{i+1} | (a_i + a_{i+2})$ folgt:

$a_{i-1} | (a_{i-2} + a_{i+1})$ und $a_{i+1} | (a_{i-1} + a_{i+2})$

Das bedeutet, wir können a_i einfach aus der Zahlensequenz herausnehmen, und die so entstehende kürzere Zahlensequenz erfüllt wieder die Teilerbedingung.

Umgekehrt kann jede Zahlensequenz verlängert werden, indem wir zwischen a_i und a_{i+1} den Term $a_i + a_{i+1}$ einfügen.

Zum Beispiel:

$1, 1 \rightarrow 1, 2, 1 \rightarrow 1, 2, 3, 1 \rightarrow 1, 2, 5, 3, 1 \rightarrow 1, 2, 5, 3, 4, 1$

oder

$1, 1 \rightarrow 1, 2, 1 \rightarrow 1, 2, 3, 1 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 1 \rightarrow 1, 2, 5, 3, 4, 1$

Wiederholen wir dieses Beispiel, indem wir jetzt bei jedem Einfügen von $a_i + a_{i+1}$ zwischen a_i und a_{i+1} nach a_i eine Marke setzen, vor welcher anschließend nichts mehr eingefügt werden darf. Im zweiten Beispiel können wir diese Bedingung nicht erfüllen. Das erste Beispiel wird zu:

$1, 1 \rightarrow 1|2, 1 \rightarrow 1|2|3, 1 \rightarrow 1|2||5, 3, 1 \rightarrow 1|2||5, 3|4, 1$

Die Stellen, an denen die 4 Marken gesetzt sind, bestimmen die Zahlensequenz a_1, a_2, a_3, a_4 (hier: 2,5,3,4) eindeutig. Nach der 1 am Anfang der Sequenz steht eine Marke.

Ersetzen wir nun die Marken durch eine "1" und die Zahlen a_i durch eine "0", so erhalten wir eine Sequenz, der Form wie wir sie in 2.13 (Vorwärts- und Rückwärtsschritte) kennengelernt haben.

Umgekehrt können wir eine Sequenz von Vorwärts- und Rückwärtsschritten als "Rezept" zum Erstellen genau einer Zahlensequenz verwenden.

Hier einige Beispiele:

110010	\Leftrightarrow	1 3, 2 3, 1
11010010	\Leftrightarrow	1 3 5, 2 3, 1
11100100	\Leftrightarrow	1 4, 3 5, 2, 1
10111000	\Leftrightarrow	1 2 7, 5, 3, 1
110110100100	\Leftrightarrow	1 3 8 13, 5 7, 2, 1

Also ergibt sich die Anzahl der möglichen Zahlensequenzen $1, a_1, \dots, a_n, 1$ mit den obigen Bedingungen auch zur Catalan-Zahl C_n .

5.18 2.2 \Leftrightarrow 2.15

Zuletzt will ich jetzt noch zeigen, daß die Anzahl der abstrakten Flexagone und Pats auch durch die Catalan-Zahlenfolge beschrieben wird. Hierzu müssen wir uns der Definition eines Pats und eines Flexagons aus Kapitel 2.15 erinnern.

Zuerst widmen wir uns den Pats:

Sei P_n die Anzahl der Pats der Ordnung $n + 1 =: m \in \mathbb{N}$. Laut Definition ist $P_0 = 1$ und wie wir in 2.15 gezeigt haben ist $P_1 = 1$.

Analog zum induktiven Vorgehen in den Beispielen in 2.15 können wir m auf $(m - 1)$ Arten zerlegen in:

$$\begin{aligned} m &= 1 + (m - 1) \\ m &= 2 + (m - 2) \\ m &= 3 + (m - 3) \\ &\dots \\ m &= (m - 2) + 2 \\ m &= (m - 1) + 1 \end{aligned}$$

Ein Pat der Ordnung m setzt sich laut Definition aus zwei Pats der Ordnung i bzw. $(m - i)$ zusammen, wobei $i \in \{1, \dots, m - 1\}$. Jeder der beiden Pats wird dabei in umgekehrter Reihenfolge notiert, und jeder Eintrag des vorne stehenden Pats um $(m - i)$ vergrößert. Die Anzahl der Pats der Ordnung m ist also

$$P_{m-1} = \sum_{i=1}^{m-1} P_{i-1} \cdot P_{m-i-1}$$

Das heißt für $n = m - 1$ gilt:

$$P_n = \sum_{i=1}^n P_{i-1} \cdot P_{n-i} = \sum_{i=0}^{n-1} P_i \cdot P_{n-i-1}$$

Diese Rekursionsformel und auch die Anfangswerte P_0, P_1 stimmen mit der Rekursionsformel (12) der Catalan-Zahlen überein. Also ist die Anzahl P_n der Pats der Ordnung $n + 1$ gleich C_n .

Kommen wir nun zu den Flexagonen:

Sei Fl_n die Anzahl der abstrakten Flexagone der Ordnung $n + 1 =: N \in \mathbb{N}$ ($N \geq 2$).

Wir haben in 2.15 bereits gesehen, daß $Fl_1 = 1$ und $Fl_2 = 2$ ist.

Da jedes Flexagon der Ordnung N wiederum aus 2 Pats so zusammengesetzt ist, daß sich die Ordnungen der Pats zu N addieren, erhalten wir analog zu oben folgende Rekursionsformel:

$$Fl_{N-1} = \sum_{i=1}^{N-1} P_{i-1} \cdot P_{N-i-1}$$

Und somit folgt sofort mit $n = N - 1$:

$$Fl_n = P_n = C_n$$

Die Anzahl der abstrakten Flexagone der Ordnung $n + 1$ ist also auch durch C_n gegeben.

5.19 Überblick für $n = 1, 2, 3, 4$

Anhand der Bijektionen zwischen den einzelnen Interpretationen der Catalan-Zahlen läßt sich folgende Übersicht erstellen:

ab

Catalansches Problem

Eulers Polygonzerlegung

Entscheidungsbäume

binäre Suchbäume

Trivalente Wurzelbäume

$k=1; n=1$
 $C_1^{(1)}=1$

Minimale Gitterwege

X_1

10

2
1

Menschen in 2 Reihen

Vorwärts- und Rückwärtsschritte

1,2,1

(1,1)

Terme beim Ausmultiplizieren

Ebene Wurzelbäume

Punkte auf einem Kreis

Punkte auf einer Linie

a

planare Reimschemata

Zahlensequenz

Flexagone

(ab)c

$k=1; n=2$
 $C_2^{(1)}=2$

X_1^2

1100

(21,1)

1,3,2,1

4 3
2 1

Minimale Gitterwege

Vorwärts- und Rückwärtsschritte

(21,1)

1100

X_1^2

Trivalente Wurzelbäume

binäre Suchbäume

Entscheidungsbäume

Eulers Polygonzerlegung

(ab)c

Punkte auf einer Linie

a a

planare Reimschemata

Menschen in 2 Reihen

Zahlensequenz

Flexagone

Terme beim Ausmultiplizieren

1010

(1,21)

1,2,3,1

4 2
3 1

Minimale Gitterwege

Vorwärts- und Rückwärtsschritte

(1,21)

1010

$X_1 X_2$

Trivalente Wurzelbäume

binäre Suchbäume

Entscheidungsbäume

Eulers Polygonzerlegung

a(bc)

Punkte auf einer Linie

a b

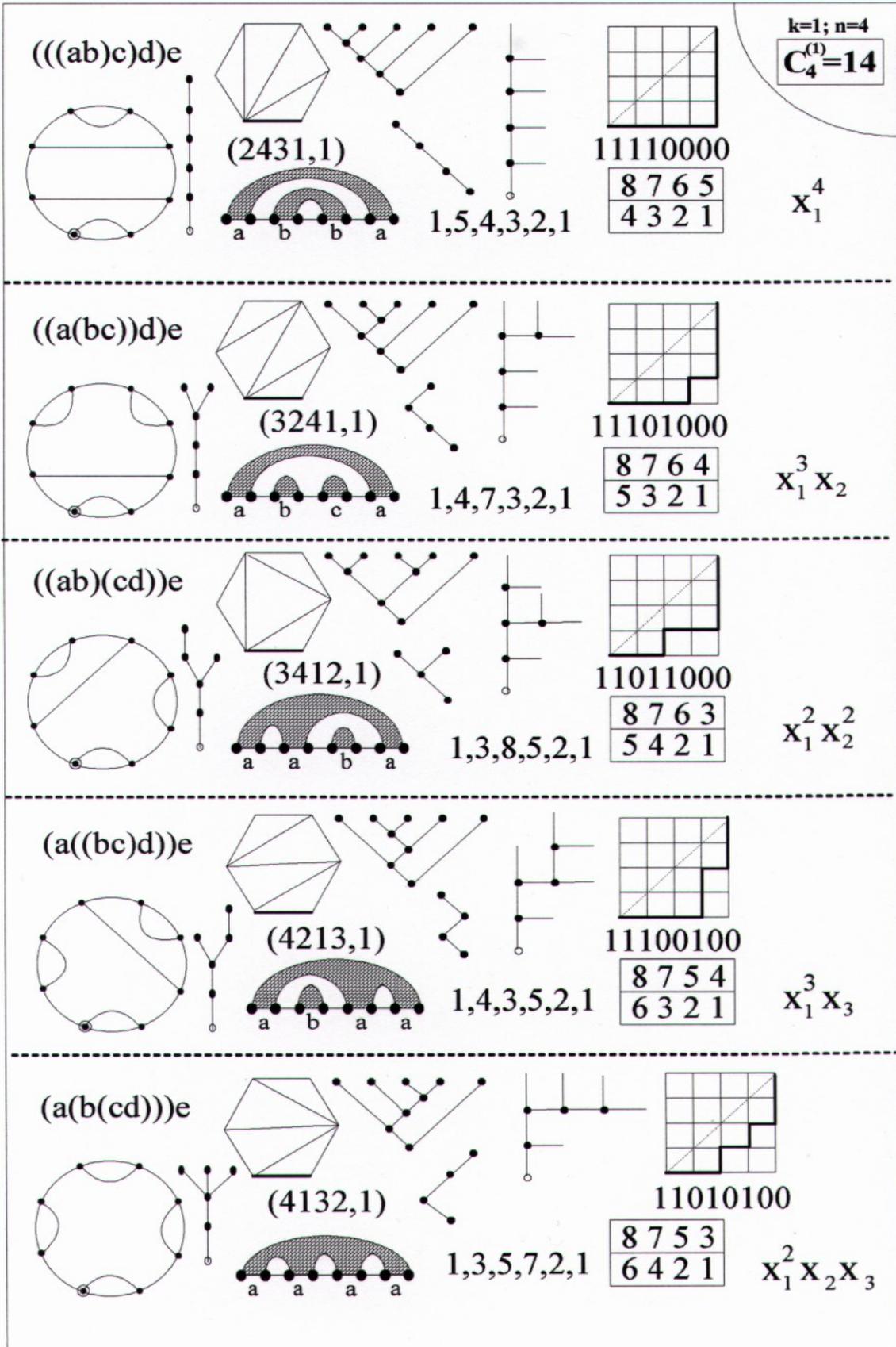
planare Reimschemata

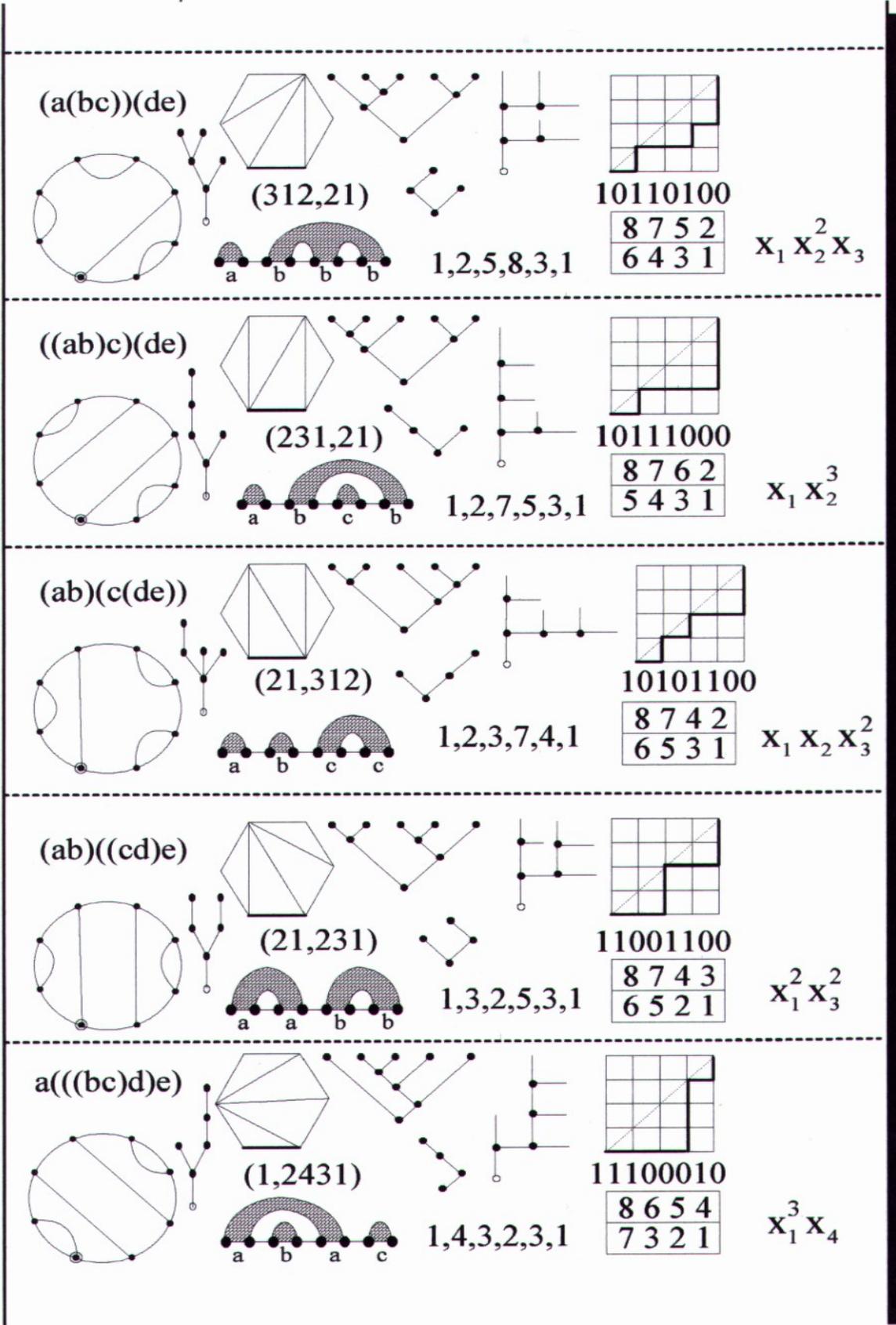
Menschen in 2 Reihen

Zahlensequenz

Flexagone

Terme beim Ausmultiplizieren





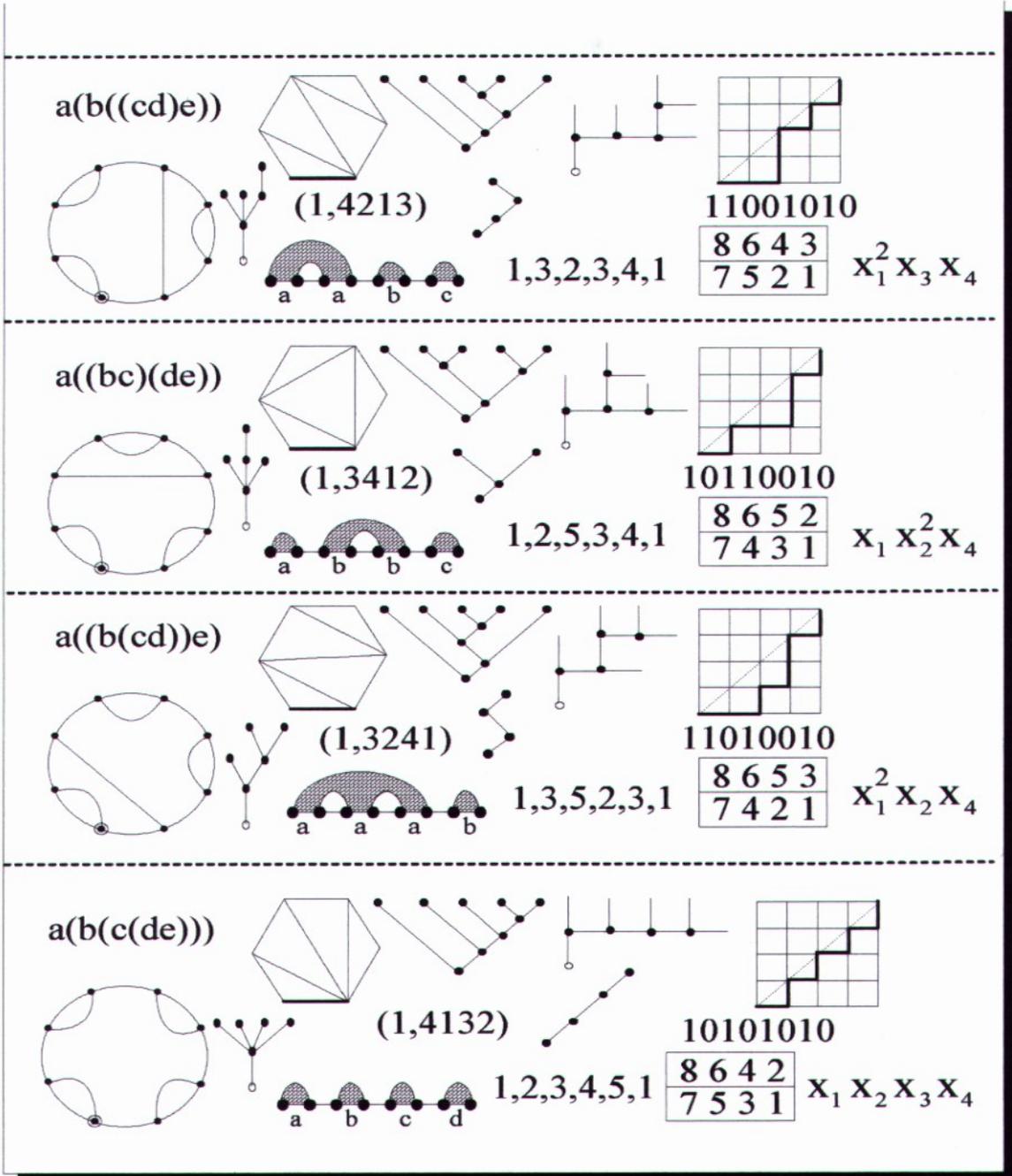


Abbildung 33: Übersicht der Interpretationen der Catalan-Zahlen für $n = 1, 2, 3, 4$

6 Verallgemeinerte Catalan-Zahlen

Nachdem wir jetzt die Zerlegungen eines n -Ecks in Dreiecke diskutiert haben, stellt sich natürlich folgende, weitergehende Frage:

Auf wieviele Arten läßt sich ein (ebenes konvexes) n -Eck durch Diagonalen in m -Ecke zerlegen?

Diese Frage stellte JOHANN FRIEDRICH PFAFF dem Mathematiker NICOLAUS FUSS, der sie 1791 für $m = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ löste (siehe [11] und [12]).

Zum Beispiel läßt sich ein Sechseck auf drei Arten in Vierecke zerlegen:

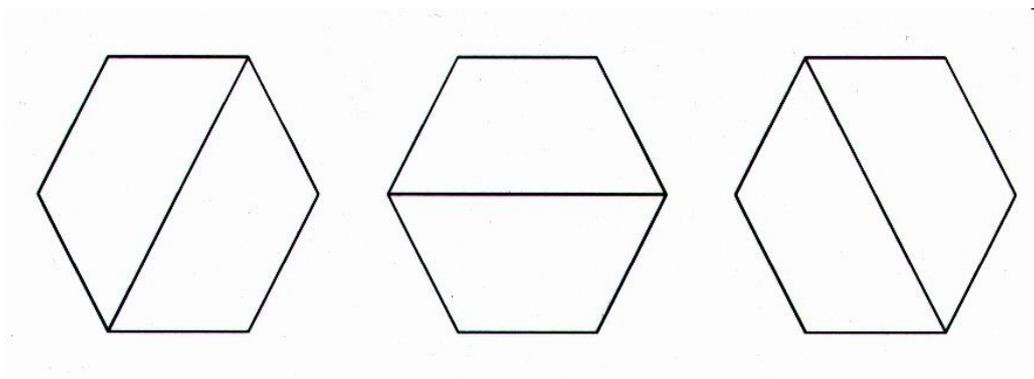


Abbildung 34: Zerlegung eines Sechsecks in Vierecke

Nun ist diese Fragestellung aber nicht für beliebige n, m sinnvoll, denn z.B ein Fünfeck läßt sich nicht in Vierecke zerlegen.

Bei genauerer Betrachtung finden wir heraus, daß nur 4-,6-,8-,10-, ...-Ecke in Vierecke zerlegbar sind. In Fünfecke wiederum lassen sich nur 5-,8-,11-,13-, ...-Ecke zerlegen, in Sechsecke lassen sich nur 6-,10-,14-,18-, ...-Ecke zerlegen usw. . Allgemein läßt sich also nur jedes $(k \cdot n + 2)$ -Eck in $(k + 2)$ -Ecke zerlegen, wobei $n, k \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Die Verallgemeinerung des Eulerschen Polygonzerlegungsproblems lautet also:

Auf wieviele Arten läßt sich ein ebenes, konvexes $(k \cdot n + 2)$ -Eck durch Diagonalen in $(k + 2)$ -Ecke zerlegen?

Die Antwort auf diese Frage will ich als **verallgemeinerte Catalan-Zahlen** bezeichnen:

$C_n^{(k)} := n$ -te Catalan-Zahl k -ten Grades

Für kleine n und kleine k können wir die Lösung noch leicht zeichnerisch finden. Jedoch wird dies schnell zu einer echten Ausdauerprüfung, da die Anzahl der Möglichkeiten bald so in die Höhe schießt, daß diese Methode unüberschaubar wird. So gibt es beispielsweise bereits 273 verschiedene Möglichkeiten ein 12-Eck in Vierecke zu zerlegen.

Wie wir später sehen werden, gilt die folgende Formel für die Catalan-Zahlen k -ten Grades:

$$C_n^{(k)} = \frac{1}{kn + 1} \cdot \binom{(k+1)n}{n} \quad (34)$$

mit $C_0^{(k)} := 1$ für $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Somit erhalten wir explizit folgende Zahlenfolgen:

n =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C_n^{(1)}$	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796
$C_n^{(2)}$	1	3	12	55	273	1428	7752	43263	246675	1430715
$C_n^{(3)}$	1	4	22	140	969	7084	53820	420732	3362260	27343888
$C_n^{(4)}$	1	5	35	285	2530	23751	231880	2330445	23950355	250543370
$C_n^{(5)}$	1	6	51	506	5481	62832	749398	9203634	115607310	1478314266
$C_n^{(6)}$	1	7	70	819	10472	141778	1997688	28989675	430321633	6503352856
$C_n^{(7)}$	1	8	92	1240	18278	285384	4638348	77652024	1329890705	23190029720
$C_n^{(8)}$	1	9	117	1785	29799	527085	9706503	184138713	3573805950	70625252863
$C_n^{(9)}$	1	10	145	2470	46060	910252	18730855	397089550	8612835715	190223180840
$C_n^{(10)}$	1	11	176	3311	68211	1489488	33870540	793542167	19022318084	464333035881
$C_n^{(11)}$	1	12	210	4324	97527	2331924	58068792	1489899060	39113958819	1045659267016
$C_n^{(12)}$	1	13	247	5525	135408	3518515	95223414	2655417765	75769712590	2201663313200
$C_n^{(13)}$	1	14	287	6930	183379	5145336	150374056	4528486314	139546108625	4379076216438
$C_n^{(14)}$	1	15	330	8555	243090	7324878	229906300	7435946115	246102164880	8294711334910
$C_n^{(15)}$	1	16	376	10416	316316	10187344	341772552	11815724400	418008817798	15059926406096
$C_n^{(16)}$	1	17	425	12529	404957	13881945	495729741	18243038385	687002577695	26347344209901
$C_n^{(17)}$	1	18	477	14910	511038	18578196	703593825	27460433286	1096750902780	44609801081780
$C_n^{(18)}$	1	19	532	17575	636709	24467212	979511104	40411916335	1706201567785	73362952525863
$C_n^{(19)}$	1	20	590	20540	784245	31763004	1340246340	58281448940	2593593086150	117544525178080
$C_n^{(20)}$	1	21	651	23821	956046	40703775	1805487684	82536059133	3861208027677	183964864369286
$C_n^{(21)}$	1	22	715	27434	1154637	51553216	2398168410	114973836450	5640955856536	281865186538386
$C_n^{(22)}$	1	23	782	31395	1382668	64601802	3144805456	157777071387	8100876697475	423601805745460
$C_n^{(23)}$	1	24	852	35720	1642914	80168088	4075854772	213570801576	11452662221055	625476563534888
$C_n^{(24)}$	1	25	925	40425	1938275	98600005	5226083475	285487026825	15960294621700	908735751398475
$C_n^{(25)}$	1	26	1001	45526	2271776	120276156	6634958811	377234855166	21949909445321	1300761975088576
$C_n^{(26)}$	1	27	1080	51039	2646567	145607112	8347053924	493176842055	29820992806242	1836485670031221
$C_n^{(27)}$	1	28	1162	56980	3065923	175036708	10412470432	638411784868	40059028316125	2560045337089240
$C_n^{(28)}$	1	29	1247	63365	3533244	209043339	12887277810	818864234837	53249713830560	3526728027925388
$C_n^{(29)}$	1	30	1335	70210	4052055	248141256	15833969580	1041380988570	70094872901955	4805224169215470
$C_n^{(30)}$	1	31	1426	77531	4626006	292881862	19321936308	1313834821299	91430190610330	6480233474961466
$C_n^{(31)}$	1	32	1520	85344	5258872	343855008	23427955408	1645235724000	118244908226588	8655461456154656

...

n=	1	2	3	4	5	6	7
$C_n^{(50)}$	1	51	3876	348551	34412301	3605885436	393764592496
$C_n^{(100)}$	1	101	15251	2727101	535565226	111646790871	24257597837616
$C_n^{(200)}$	1	201	60501	21574201	8450592951	3513973161741	1522993319598231
$C_n^{(500)}$	1	501	376251	334835501	327347451126	339755819754351	367557712527168076
$C_n^{(1000)}$	1	1001	1502501	2672671001	5222931464751	10836046529008701	23433233703639911151

Diese Catalan-Zahlen k -ten Grades sind - wie in Kapitel 2 - Antworten auf die nun folgenden verallgemeinerten Fragestellungen (Beweis im Kapitel 7):

Seien $n, k \in \mathbb{N}$.

6.1 Das verallgemeinerte Catalansche Problem

Auf wieviele Arten läßt sich ein Produkt aus $k \cdot n + 1$ verschiedenen Faktoren zu $(k + 1)$ -Tupeln geklammert berechnen, wenn die Reihenfolge der Faktoren festgelegt ist?

Beispiele:

- Für $k = 2, n = 2$ erhalten wir die 3 Möglichkeiten:

$$(abc)de \quad a(bcd)e \quad ab(cde)$$

- Für $k = 3, n = 3$ gibt es 22 Möglichkeiten:

$$[(abcd)efg]hij \quad [a(bcde)fg]hij \quad [ab(cdef)g]hij \quad [abc(defg)]hij$$

$$a[(bcde)efg]ij \quad a[b(cdefg)]hij \quad a[bc(defg)h]ij \quad [a[bcdefg]h]ij$$

$$ab[(cdef)ghi]j \quad ab[c(defg)hi]j \quad ab[cd(efgh)ij] \quad ab[cdef(ghi)]j$$

$$abc[(defg)hij] \quad abc[d(efgh)ij] \quad [abc[defghi]j] \quad abc[def(ghi)]$$

$$(abcd)(efgh)ij \quad (abcd)e(fghi)j \quad (abcd)ef(ghij) \quad a(bcde)(fghi)j$$

$$a(bcde)f(ghij) \quad ab(cdef)(ghij)$$

- Für $k = 10, n = 3$ gibt es bereits 176 Möglichkeiten die 31 Faktoren zu 4-Tupel geklammert zu schreiben. Allerdings "gehen" uns hier schon langsam die Buchstaben "aus".

O. A. SANDS behandelt diese Fragestellung auch in seinem Artikel "On generalised Catalan numbers"[14]. Ich will nun auf gleichem Weg dieses Problem lösen:

Betrachten wir also ein Produkt P aus $kn + 1$ Faktoren, deren Reihenfolge festgelegt ist und die zu $(k + 1)$ -Tupeln geklammert sind.

Um die vielen Klammern zu vermeiden, wollen wir zur näheren Behandlung der Frage die rückwärtige polnische Notation verwenden. Dabei setzen wir \P 's in die Sequenz der Faktoren so ein, daß jedes \P anzeigt, daß die vorhergehenden $k + 1$ Faktoren für sich geklammert multipliziert werden müssen. Das wäre für unser obiges Beispiel:

- Für $k = 2, n = 2$:

$$abc\updownarrow de\updownarrow := (abc)de \quad abcd\updownarrow e\updownarrow := a(bcd)e \quad abcde\updownarrow\updownarrow := ab(cde)$$

- Für $k = 3, n = 3$ ist z.B.:

$$abcd\updownarrow efg\updownarrow hij\updownarrow := [(abcd)efg]hij \quad abcde\updownarrow fg\updownarrow hij\updownarrow := [a(bcde)fg]hij$$

$$abcd\updownarrow efg hij\updownarrow\updownarrow := (abcd)ef(ghij) \quad abcde\updownarrow fghi\updownarrow j\updownarrow := a(bcde)(fghi)j$$

Natürlich stellt nun nicht jede beliebige Sequenz von \updownarrow 's und Faktoren aus P ein sinnvolles Produkt dar. So geben z.B für $k = 3, n = 3$ folgende Ausdrücke keinen Sinn nach der oben genannten Definition:

$$ab\updownarrow cdefghij\updownarrow\updownarrow = ? \quad abcde\updownarrow\updownarrow fghij\updownarrow = ?$$

Alle die, die jedoch Sinn machen, wollen wir ab jetzt "repräsentative" Sequenzen nennen.

Das verallgemeinerte Catalansche Problem lautet somit:

Wieviele repräsentative Sequenzen aus $kn + 1$ Faktoren und n \updownarrow 's gibt es, wenn \updownarrow anzeigt, daß die vorhergehenden $k + 1$ Faktoren für sich geklammert multipliziert werden müssen?

Zuerst überlegen wir uns, wann eine Sequenz dieser Art repräsentativ ist:

Es ziemlich leicht einzusehen, daß gilt:

Eine Sequenz aus $kn + 1$ Faktoren aus P und n \updownarrow 's ist genau dann repräsentativ, wenn die Anzahl der Faktoren aus P vor jedem beliebigen Punkt der Sequenz mehr als k -mal so groß ist als Anzahl der \updownarrow 's vor diesem Punkt.

Nun wollen wir zeigen:

Behauptung:

Sei eine beliebige Sequenz aus $kn + 1$ Faktoren aus P und n \updownarrow 's gegeben. Dann ist genau eine der $kn + n + 1$ Sequenzen, die durch zyklische Permutation aus dieser entstehen, repräsentativ.

Beweis:

Sei eine beliebige Sequenz

$$x_1, x_2, \dots, x_{kn+n+1}$$

aus $kn + 1$ Faktoren aus P und n \updownarrow 's gegeben.

Annahme 1:

Zwei Sequenzen, die aus dieser durch zyklische Permutation entstehen, seien repräsentativ.

Diese seien O.B.d.A gegeben durch

$$x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_{kn+n+1} \quad \text{und} \quad x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{kn+n+1}, x_1, x_2, \dots, x_m$$

Dann wissen wir von der ersten Sequenz, daß die Anzahl der Faktoren aus P in x_1, x_2, \dots, x_m größer als $k \cdot q_m$ ist, wobei $q_m :=$ Anzahl der \mathfrak{P} 's vor x_{m+1} .

Von der zweiten Sequenz wissen wir dann, daß die Anzahl der Faktoren aus P in $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{kn+n+1}$ größer als $k \cdot (n - q_m)$ ist.

Das bedeutet, in der Sequenz $x_1, x_2, \dots, x_{kn+n+1}$ müßten mindestens

$$[k \cdot q_m + 1] + [k \cdot (n - q_m) + 1] = kn + 2 \text{ Faktoren aus } P \text{ sein.}$$

In dieser Sequenz sind aber nur $kn + 1$ Faktoren aus P .

Dies ist also ein Widerspruch und die Annahme, es gebe zwei solche repräsentative Sequenzen, trifft nicht zu.

Annahme 2:

Keine der Sequenzen, die aus dieser durch zyklische Permutation entstehen, sei repräsentativ.

Angefangen von x_1 existiert dann mindestens ein $m_1 > 0$, so daß die Anzahl der Faktoren aus P in x_1, x_2, \dots, x_{m_1} kleiner oder gleich als $k \cdot q_{m_1}$ ist, wobei $q_{m_1} :=$ Anzahl der \mathfrak{P} 's vor x_{m_1+1} .

Gehen wir zyklisch durch die Sequenz hindurch, so existiert dann auch mindestens ein $m_2 > 0$, so daß die Anzahl der Faktoren aus P in $x_{m_1+1}, x_{m_1+2}, \dots, x_{m_1+m_2}$ kleiner oder gleich als $k \cdot q_{m_2}$ ist, wobei $q_{m_2} :=$ die Anzahl der \mathfrak{P} 's zwischen x_{m_1} und $x_{m_1+m_2+1}$ ist.

Gehen wir weiter zyklisch durch die Sequenz hindurch, so existiert dann auch mindestens ein $m_3 > 0$, so daß die Anzahl der Faktoren aus P in $x_{m_1+m_2+1}, \dots, x_{m_1+m_2+m_3}$ kleiner oder gleich als $k \cdot q_{m_3}$ ist, wobei $q_{m_3} :=$ die Anzahl der \mathfrak{P} 's zwischen $x_{m_1+m_2}$ und $x_{m_1+m_2+m_3+1}$ ist.

Diesen Prozeß wiederholen wir zyklisch solange, bis wir schließlich zum zweitenmal an dieselbe Bruchstelle gelangen.

Wir zählen die Anzahl der "durchlaufenen" Faktoren aus P zwischen dem ersten und dem zweiten Auftreten dieser Bruchstelle und die Anzahl der jeweils dazwischenliegenden \mathfrak{P} 's, die in jedem Schritt größer oder gleich der jeweiligen Faktorenanzahl durch k ist.

Nach dem Herauskürzen der "Umlaufzahl" finden wir somit: $kn + 1 \leq kn$

Dies ist ein Widerspruch und daher trifft die Annahme, es gebe keine repräsentative Sequenz, nicht zu.

Somit ist die Behauptung bewiesen.

Insgesamt folgt, daß die Anzahl der repräsentativen Sequenzen aus $kn + 1$ Faktoren aus P und n \mathfrak{P} 's gleich $\frac{1}{kn+n+1}$ mal der Anzahl aller Sequenzen dieser Art ist:

$$\frac{1}{kn+n+1} \cdot \binom{kn+n+1}{n} = \frac{1}{kn+n+1} \cdot \frac{(kn+n+1)!}{n! \cdot (kn+1)!} =$$

$$= \frac{1}{kn+1} \cdot \frac{(kn+n)!}{n! \cdot (kn)!} = \frac{1}{kn+1} \cdot \binom{(k+1)n}{n} = C_n^{(k)}.$$

Das ist die Lösung des verallgemeinerten Catalanschen Problems.

Gleichzeitig haben wir hier eine andere gebräuchliche Form der direkten Berechnungsformel der Catalan-Zahlen k -ten Grades erhalten, die in der Literatur häufig zu finden ist:

$$C_n^{(k)} = \frac{1}{kn+n+1} \cdot \binom{kn+n+1}{n} = \frac{1}{(k+1)n+1} \cdot \binom{(k+1)n+1}{n} \quad (35)$$

6.2 Das verallgemeinerte Problem der Polygonzerlegung

Auf wieviele Arten läßt sich ein ebenes, konvexes $(k \cdot n + 2)$ -Eck durch Diagonalen in $(k+2)$ -Ecke zerlegen?

Die Zahlenfolge $(C_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ will ich als Lösung dieses Problems definieren.

Im Kapitel 7 zeige ich dann über die Äquivalenz der verschiedenen verallgemeinerten Fragestellungen, daß die Formel (34) auch hier zutrifft.

6.3 Minimale Gitterwege mit Nebenbedingungen

Genauso wie wir im Kapitel 2.3 zusätzlich gefordert haben, daß die Gitterwege die Winkelhalbierende nicht überschreiten dürfen, wollen wir nun eine etwas allgemeinere Nebenbedingung stellen:

Wieviele minimale Gitterwege vom Punkt $(0, 0)$ zum Punkt $(k \cdot n, n)$, welche die Gerade $g : y = \frac{1}{k} \cdot x$ nicht überschreiten, gibt es ?

Umformuliert ergibt sich folgende äquivalente Fragestellung:

Bei einem Spiel bekommt jeder Spieler pro Spiel einen Punkt. Nach $(k+1) \cdot n$ Spielen hat Spieler A $k \cdot n$ und Spieler B n Punkte. Wieviele Möglichkeiten des Verlaufs der Spiele gibt es, so daß Spieler A zu jeder Zeit mindestens k -mal so viele Punkte wie Spieler B hatte?

Für $k = 2$ ergibt sich folgende Situation:

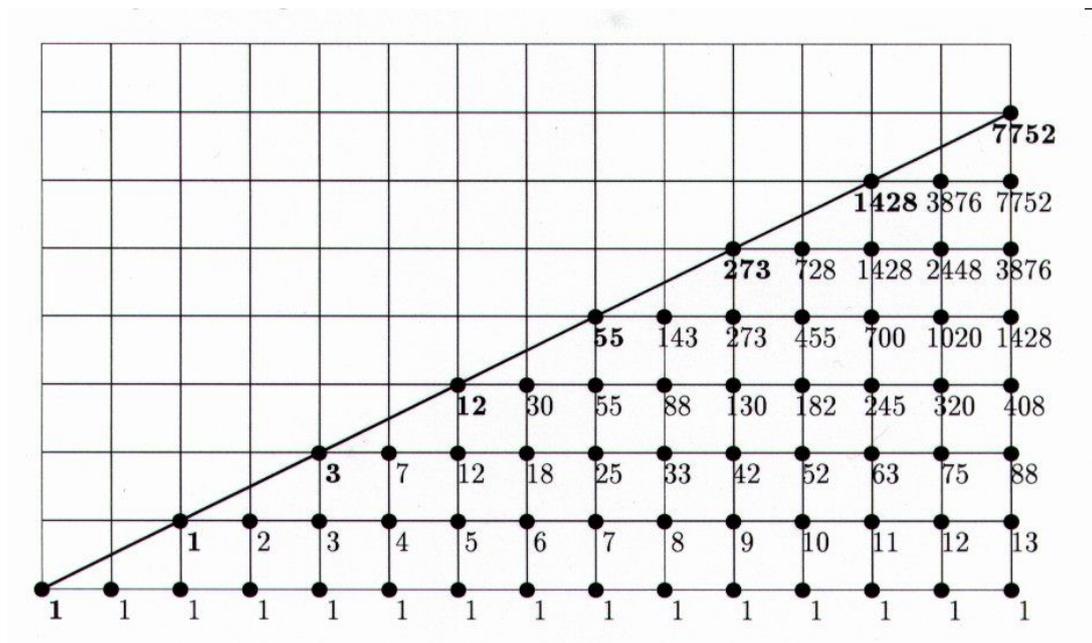


Abbildung 35: ebenes Gitter mit Angabe der Anzahl der minimalen Gitterwege, die die Gerade $y = \frac{1}{2} \cdot x$ nicht überschreiten und zu diesem Punkt führen

Für $k = 3$ sieht dies so aus:

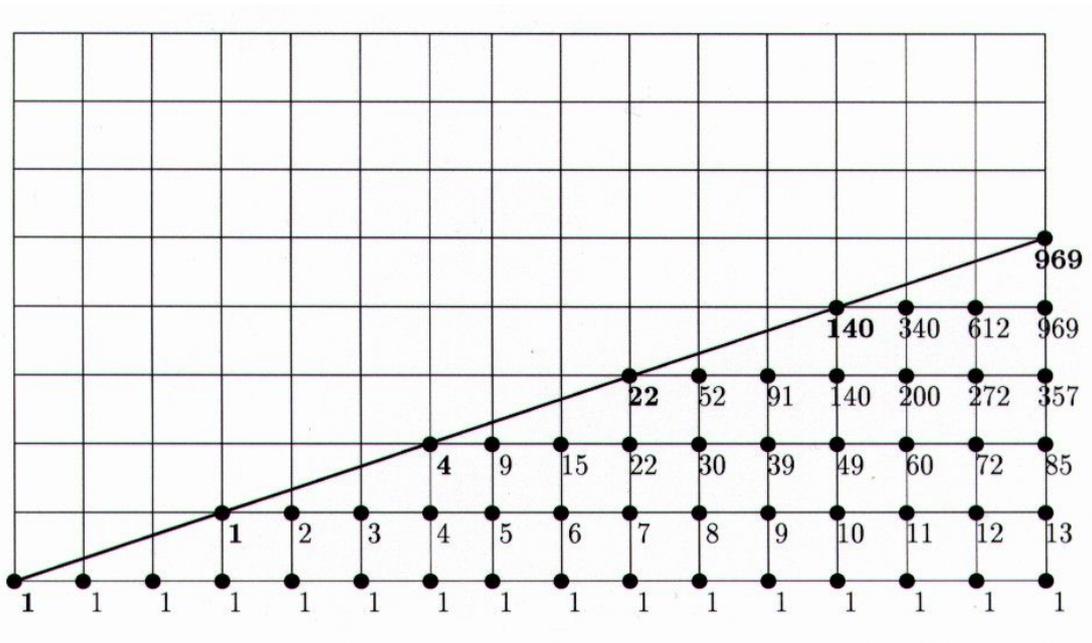


Abbildung 36: ebenes Gitter mit Angabe der Anzahl der minimalen Gitterwege, die die Gerade $y = \frac{1}{3} \cdot x$ nicht überschreiten und zu diesem Punkt führen

J.C.BINZ hat in [13] in dem Artikel "Minimale Gitterwege mit Nebenbedingungen" eine Formel hergeleitet, die uns Antwort auf die obige Frage geben wird:

Wir erinnern uns (siehe 2.3, Beziehung (3)) an die Anzahl $B(n, m)$ der minimalen Gitterwege vom Startpunkt $(0,0)$ zum beliebigen Endpunkt (n, m) . Die zulässigen Wege dürfen jetzt also nicht die Gerade $g : y = \frac{1}{k} \cdot x$ überschreiten. Deshalb vermindert sich deren Anzahl um die Zahl $V(n, m)$ der Wege, die diese Gerade überschreiten.

Die gesuchte Anzahl ergibt sich also zu

$$ZW(n, m) := B(n, m) - V(n, m).$$

Für $n < km$ befinden wir uns im verbotenen Bereich, deshalb sei im folgenden $n \geq km$ vorausgesetzt.

Es sei

$$VW := \left\{ \text{Verbotene Wege von } (0, 0) \text{ nach } (n, m) \right\}$$

$$M := \left\{ \text{Minimalwege von } (0, 0) \text{ nach } (n + 1, m - 1) \right\}$$

Nun beschreiben wir jeden verbotenen Weg aus VW mittels einer $(n + m)$ -stelligen Folge

$$f = (x_1, x_2, \dots, x_{n+m}) \quad \text{mit} \quad x_i = \begin{cases} 1 & \text{für einen Horizontalschritt} \\ -k & \text{für einen Vertikalschritt} \end{cases}$$

Jedem Weg f ordnen wir die "Partialsommen"

$$s_0(f) := 0 \quad s_r(f) := \sum_{i=1}^r x_i$$

zu.

Dann gilt: $s_{n+m}(f) = n - km \geq 0$.

Wir erkennen einen verbotenen Weg f daran, daß $s_r(f) < 0$ für mindestens ein $r \in \{0, 1, 2, \dots, n + m\}$.

Sei nun r_v die kleinste Zahl aus $\{0, 1, 2, \dots, n + m\}$, für die $s_{r_v}(f) < 0$ ist.

Dann sind: $x_{r_v} = -k$, $s_{r_v}(f) = -i$ und $s_{r_v-1}(f) = -i + k$ ($i \in \{1, 2, \dots, k\}$)

$V_i \subseteq VW$ seien die Mengen von verbotenen Wegen, auf die diese Eigenschaft gerade zutrifft.

Damit ist :

$$V_i \cap V_j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j \quad \text{und} \quad VW = \bigcup_{i=1}^k V_i$$

Nun wollen wir zeigen, daß es eine Bijektion zwischen V_i und M gibt.

Sei jetzt $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ fest gewählt.

Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \quad & V_i \rightarrow M \\ & (x_1, x_2, \dots, x_{r_v-1}, -k, x_{r_v+1}, \dots, x_{n+m}) \mapsto (x_{r_v-1}, \dots, x_2, x_1, 1, x_{r_v+1}, \dots, x_{n+m}) \end{aligned}$$

Kurz: $\phi(f) =: g \in M$, da wir dabei die Vertikale x_{r_v} durch eine Horizontale ersetzen. Außerdem kehren wir die Reihenfolge der vorhergehenden Glieder um und lassen die Reihenfolge der nachfolgenden Glieder bestehen.

Es gilt $s_{r_v}(g) = -i + k + 1$ und $s_{r_{v-1}}(g) = -i + k$.

Nehmen wir an es gäbe ein $r_z < r_v$ mit $s_{r_z}(g) = -i + k + 1$ und $s_{r_{z-1}}(g) = -i + k$, so würde gelten:

$$x_{r_v-r_z-1} + \dots + x_2 + x_1 = s_{r_{v-1}}(g) - s_{r_z}(g) = -1 < 0.$$

Das wäre ein Widerspruch zur Minimalitätsbedingung für r_v . Daher läßt sich f aus g eindeutig rekonstruieren, ϕ ist also injektiv.

Für jeden Weg $g \in M$ gilt: $s_{n+m}(g) = (n+1) - k(m-1) = n - km + k + 1 \geq k + 1$.

Weil Zunahmen von s_r immer nur um 1 erfolgen, gibt es eine kleinste Zahl $r_k \in \{0, 1, 2, \dots, n+m\}$ mit $s_{r_k}(g) = -i + k + 1$ und $s_{r_{k-1}}(g) = -i + k$.

Wie oben ergibt sich daraus die Existenz eines Weges $f \in V_i$, so daß $\phi(f) = g$. ϕ ist also surjektiv und somit auch bijektiv.

Daraus folgt $|V_i| = |M|$.

Diese Überlegungen verlaufen nun analog für jedes weitere $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Insgesamt folgt:

$$V(n, m) = |VW| = \sum_{i=1}^k |V_i| = k \cdot |M| = k \cdot \binom{n+1+m-1}{n+1} = k \cdot \binom{n+m}{n+1}$$

Daraus erhalten wir nun die Anzahl der zulässigen Wege:

$$ZW(n, m) = \binom{n+m}{n} - k \cdot \binom{n+m}{n+1} \quad (36)$$

Diese Formel bezieht sich auf einen beliebigen Endpunkt des minimalen Gitterwegs. Wir interessieren uns hier aber nur für den Endpunkt (kn, n) . Die Antwort auf unsere Frage am Anfang des Kapitels ist also:

$$\begin{aligned} ZW(kn, n) &= \binom{kn+n}{kn} - k \cdot \binom{kn+n}{kn+1} = \\ &= \frac{(kn+n)!}{(kn)! \cdot n!} - k \cdot \frac{(kn+n)!}{(kn+1)! \cdot (n-1)!} = \\ &= \frac{(kn+n)! \cdot (kn+1-kn)}{(kn+1)! \cdot n!} = \\ &= \frac{(kn+n)!}{(kn+1) \cdot (kn)! \cdot n!} = \\ &= \frac{1}{kn+1} \cdot \binom{(k+1)n}{n} = C_n^{(k)} \end{aligned} \quad (37)$$

Die Catalan-Zahlen k -ten Grades geben also die Anzahl der zulässigen minimalen Gitterwege unter der Nebenbedingung, daß die Gitterwege die Gerade $g : y = \frac{1}{k} \cdot x$ nicht überschreiten dürfen, an.

6.4 Anzahl der Terme beim Ausmultiplizieren

Wieviele verschiedene Terme entstehen beim Ausmultiplizieren des Produkts

$$(\mathbf{x}_1)^k (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)^k (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)^k \cdot \dots \cdot (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_n)^k ?$$

Jeder Term, der hierbei entsteht, hat die Form

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$$

wobei für die nichtnegativen ganzen Zahlen a_i gilt:

$$\begin{array}{rcl} a_n & \leq & k \\ a_{n-1} + a_n & \leq & 2k \\ a_{n-2} + a_{n-1} + a_n & \leq & 3k \\ & \dots & \\ a_2 + a_3 + \dots + a_n & \leq & (n-1)k \\ a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n & = & nk \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n & = & nk \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} & \geq & (n-1)k \\ a_1 + \dots + a_{n-2} & \geq & (n-2)k \\ & \dots & \\ a_1 + a_2 & \geq & 2k \\ a_1 & \geq & k \end{array}$$

Andersherum gibt es für jede Auswahl nichtnegativer ganzer Zahlen, welche diese Bedingungen erfüllen, einen Term der obigen Form mit diesen ganzen Zahlen als Exponenten.

Beispiele:

- Sei $k = 3, n = 2$:

$$\begin{aligned} (x_1)^3 (x_1 + x_2)^3 &= (x_1)^3 (x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + x_2^3) \\ &= x_1^6 + 3x_1^5 x_2 + 3x_1^4 x_2^2 + x_1^3 x_2^3 \end{aligned}$$

Es entstehen also 4 Terme in diesem Fall.

- Sei $k = 2, n = 3$:

$$\begin{aligned} (x_1)^2 (x_1 + x_2)^2 (x_1 + x_2 + x_3)^2 &= x_1^6 + 4x_1^5 x_2 + 6x_1^4 x_2^2 + 2x_1^5 x_3 + 6x_1^4 x_2 x_3 + x_1^4 x_3^2 + \\ &+ 4x_1^3 x_2^3 + x_1^2 x_2^4 + 6x_1^3 x_2^2 x_3 + 2x_1^3 x_2 x_3^2 + 2x_1^2 x_2^3 x_3 + x_1^2 x_2^2 x_3^2 \end{aligned}$$

Dies sind 12 Terme.

6.5 Allgemeine Entscheidungsbäume

Wieviele Entscheidungsbäume $(k+1)$ -ten Grades mit $k \cdot n + 1$ Endpunkten gibt es ?

Zur Erklärung allgemeiner Entscheidungsbäume siehe Kapitel 2.5.

Für $k = 3, n = 2$ erhalten wir 4 Entscheidungsbäume 4.Grades mit 7 Endpunkten:

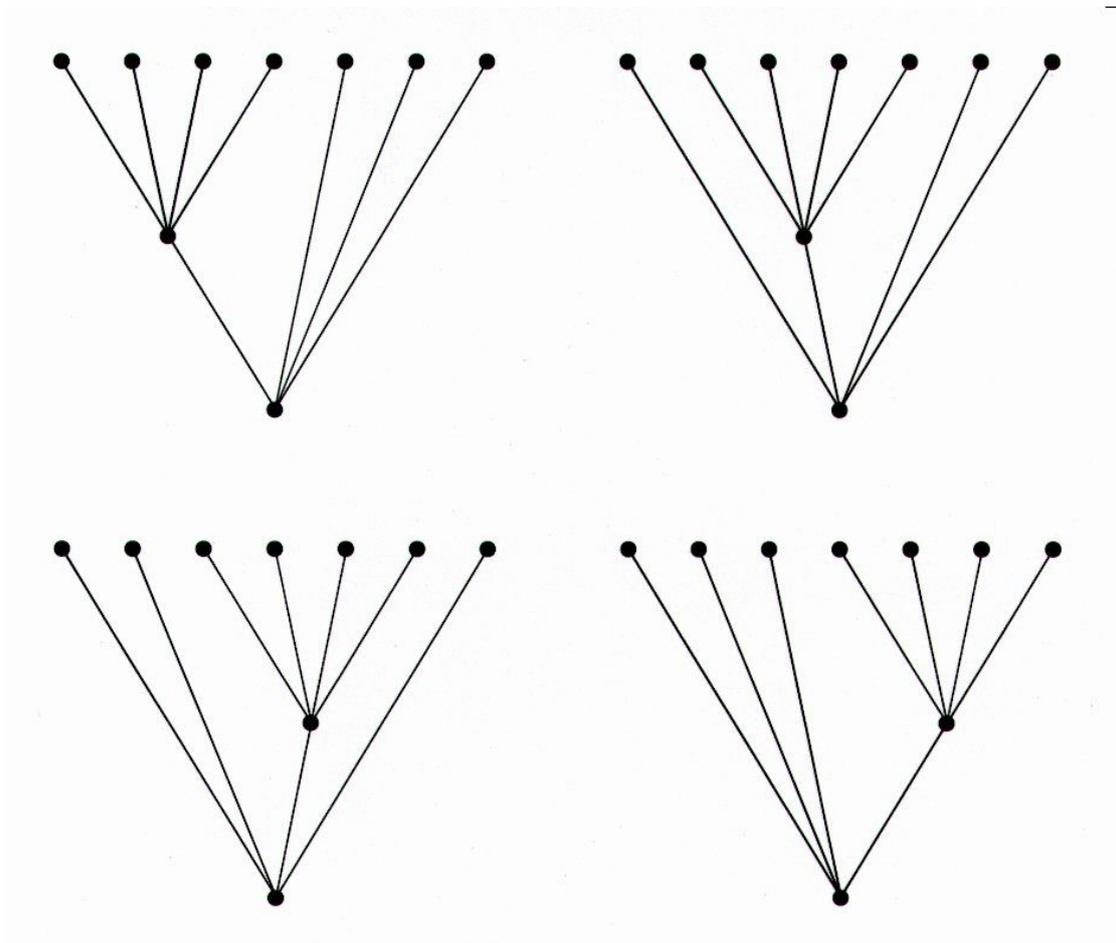


Abbildung 37: Entscheidungsbäume 4.Grades

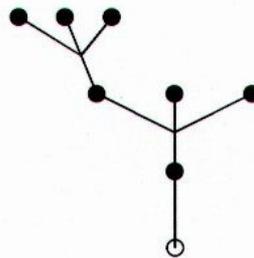
6.6 Ebene Wurzelbäume mit mehrfachen Ästen

Wieviele ebene Wurzelbäume aus n k -fachen Ästen gibt es ?

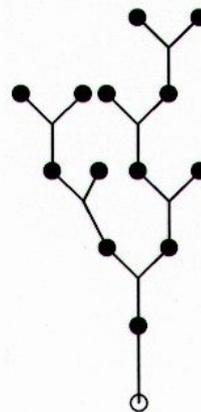
Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir erst noch festlegen, was mit dem Begriff "mehrfacher Ast" gemeint sein soll:

Ich will darunter einen Ast verstehen, der einen Anfangspunkt hat, sich in der Mitte verzweigt und mehrere Endpunkte hat. Ein k -facher Ast hat so immer k Endpunkte. Wir wollen nur Wurzelbäume betrachten, die aus einer bestimmten Sorte mehrfacher Äste und einer einfachen Wurzel zusammengesetzt sind.

So ist zum Beispiel



ein ebener Wurzelbaum mit 2 3-fachen Ästen oder



ein ebener Wurzelbaum mit 6 2-fachen Ästen.

6.7 $(k + 2)$ -valente ebene Wurzelbäume

Wieviele $(k + 2)$ -valente ebene Wurzelbäume mit n Verzweigungspunkten gibt es ?

$(k + 2)$ -valente Wurzelbäume sind dadurch gekennzeichnet, daß zu jedem Verzweigungspunkt genau $(k + 2)$ Äste führen.

Im Fall $k = 2, n = 2$ sind zum Beispiel die einzigen 3 möglichen 4-valenten ebenen Wurzelbäume mit 2 Verzweigungspunkten folgende:

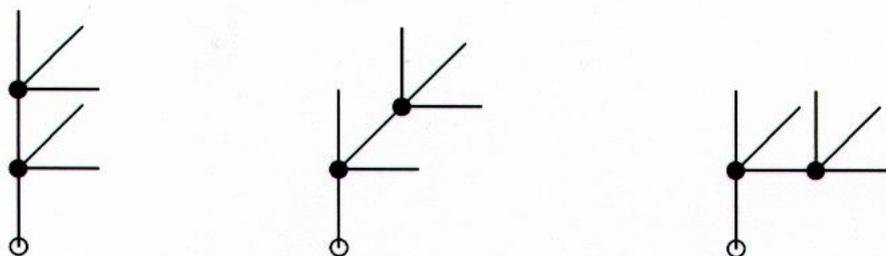


Abbildung 38: 4-valente ebene Wurzelbäume

Im Folgenden werde ich die Antwort auf diese Frage herleiten, indem ich einer Idee folge, die bereits D. A. KLARNER in [15] ausführte:

Die gesuchte Anzahl von $(k + 2)$ -valenten ebenen Wurzelbäumen mit n Verzweigungspunkten sei $W_n^{(k)}$.

Zuerst betrachten wir zwei möglichst "allgemeine" mehrvalente ebene Wurzelbäume, um uns solche Bäume besser zu veranschaulichen (siehe Abbildung 39).

Nehmen wir von einem solchen $(k + 2)$ -valenten Wurzelbaum mit n Verzweigungspunkten die Wurzel weg und konzentrieren uns auf den Verzweigungspunkt, der an der Wurzel hing, so bemerken wir, daß an diesem Punkt wieder $(k + 1)$ $(k + 2)$ -valente Wurzelbäume hängen, die diesen Punkt als Wurzelpunkt haben, und deren Summe der Anzahl ihrer Verzweigungspunkte $(n - 1)$ ist.

Aus dieser Überlegung heraus ist es leicht ersichtlich, daß für $W_n^{(k)}$ folgende Rekursionsformel gelten muß:

$$W_n^{(k)} = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{k+1}=n-1} W_{i_1}^{(k)} \cdot W_{i_2}^{(k)} \cdot \dots \cdot W_{i_{k+1}}^{(k)} \quad (38)$$

wobei $i_j \in \mathbb{N}_0$.

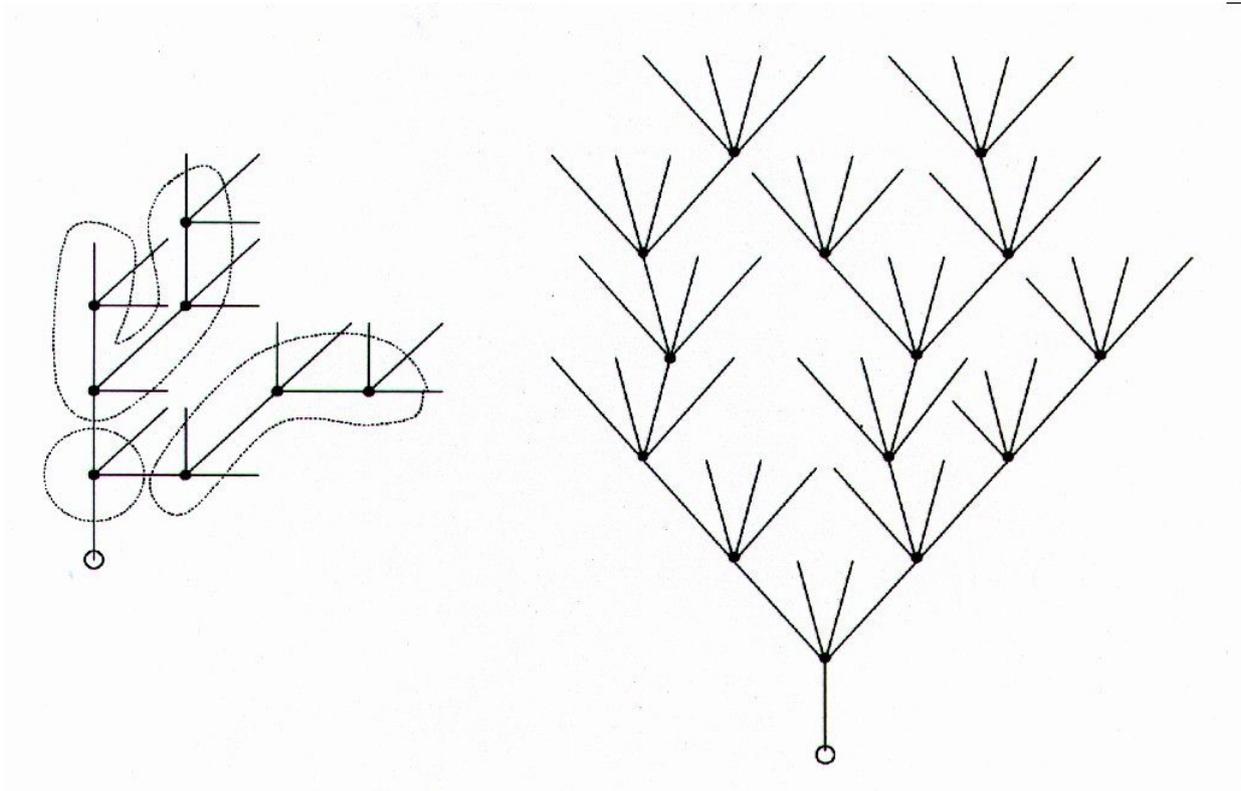


Abbildung 39: Mehrvalente ebene Wurzelbäume

Wir setzen für die gewöhnliche erzeugende Funktion

$$\text{einweinw}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} W_n^{(k)} \cdot z^n \quad (39)$$

Dann gilt folgende Funktionalgleichung:

$$z \cdot \text{einweinw}(z)^{k+1} - \text{einweinw}(z) + 1 = 0 \quad (40)$$

Beweis:

Für die Potenz einer Potenzreihe gilt

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot x^m \right)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i_1+i_2+\dots+i_p=n} a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_p} \right) \cdot x^n$$

Daraus folgt

$$z \cdot \text{einweinw}(z)^{k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{i_1+i_2+\dots+i_{k+1}=n} W_{i_1}^{(k)} \cdot W_{i_2}^{(k)} \cdot \dots \cdot W_{i_{k+1}}^{(k)} \right)}_{=W_{n+1}^{(k)}} \cdot z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} W_n^{(k)} \cdot z^n$$

Mit $W_0^{(k)} := 1$ gilt also die Behauptung (40).

Die Lösung von (40) ist nach PÓLYA und SZEGÖ [16] gegeben durch

$$\text{einweinw}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \binom{(k+1) \cdot n}{n-1} \cdot z^n$$

Für $n > 0$ haben wir also

$$\begin{aligned} W_n^{(k)} &= \frac{1}{n} \cdot \binom{(k+1) \cdot n}{n-1} = \frac{((k+1)n)!}{n \cdot (n-1)! \cdot ((k+1)n - (n-1))!} = \\ &= \frac{((k+1)n)!}{n! \cdot (kn+1)!} = \frac{1}{kn+1} \cdot \frac{((k+1)n)!}{n! \cdot (kn)!} = \frac{1}{kn+1} \cdot \binom{(k+1)n}{n} = C_n^{(k)} \end{aligned}$$

Wir kommen also wieder auf die verallgemeinerten Catalan-Zahlen k -ten Grades.

Gleichzeitig haben wir mit (38) die verallgemeinerte Rekursionsformel der Catalan-Zahlen k -ten Grades erhalten:

$$C_n^{(k)} = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{k+1}=n-1} C_{i_1}^{(k)} \cdot C_{i_2}^{(k)} \cdot \dots \cdot C_{i_{k+1}}^{(k)} \quad (41)$$

wobei $i_j \in \mathbb{N}_0$.

6.8 $(k + 1)$ -näre Suchbäume

Wieviele $(k + 1)$ -näre Suchbäume mit n Ecken gibt es ?

$(k + 1)$ -näre Suchbäume mit n Ecken seien Bäume mit einem Ausgangspunkt, $n - 1$ Verzweigungs- bzw. Endpunkten und $n - 1$ Ästen, für die höchstens $(k + 1)$ mögliche Verzweigungsrichtungen zur Verfügung stehen.

Sei z.B. $k = 2, n = 3$.

Es gibt genau die folgenden 12 ternären Suchbäume mit 3 Ecken:

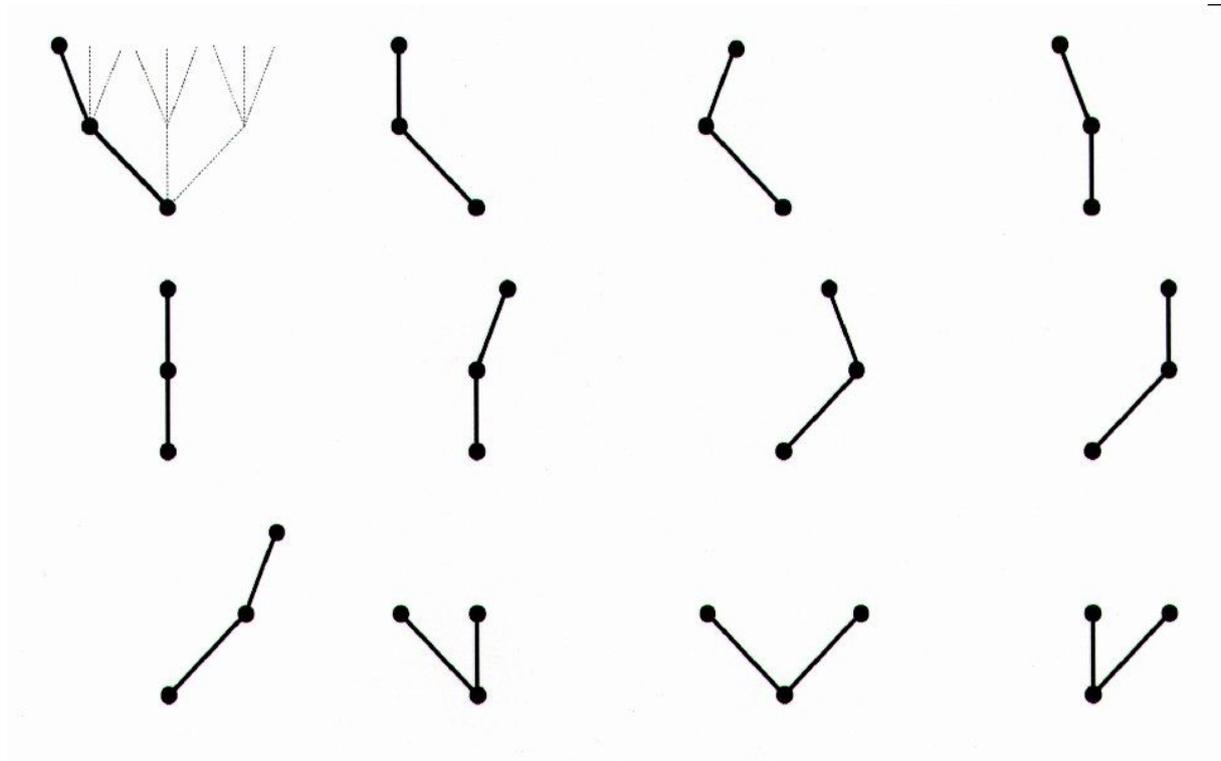


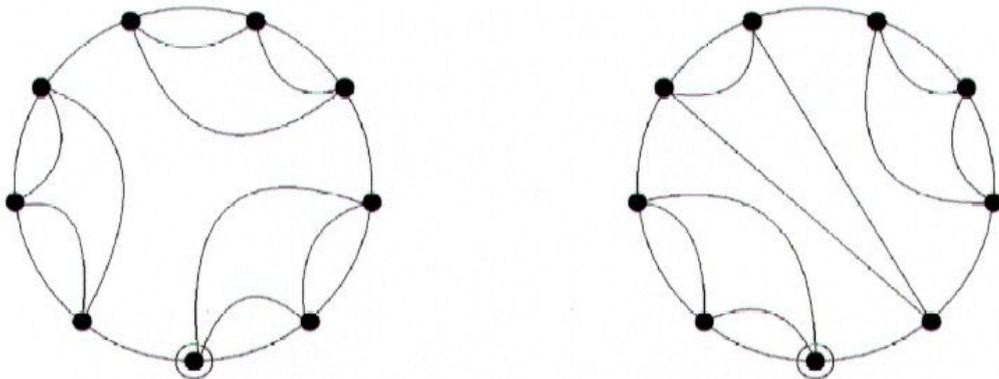
Abbildung 40: Ternäre Suchbäume mit 3 Ecken

6.9 Sich nicht schneidende Verbindungen von $(k + 1)n$ Punkten auf einem Kreis

Wieviele Möglichkeiten gibt es, $(k + 1) \cdot n$ Punkte auf einer Kreislinie so innerhalb des Kreises zu verbinden, daß immer genau $(k + 1)$ Punkte miteinander verbunden sind (von jedem Punkt gehen höchstens zwei Verbindungslinien weg!) und daß sich die Verbindungslinien nicht schneiden?

Zum besseren Verständnis hier einige Beispiele:

Für $k = 2, n = 3$ wäre z.B. möglich:



Oder für $k = 4, n = 2$ z.B. :

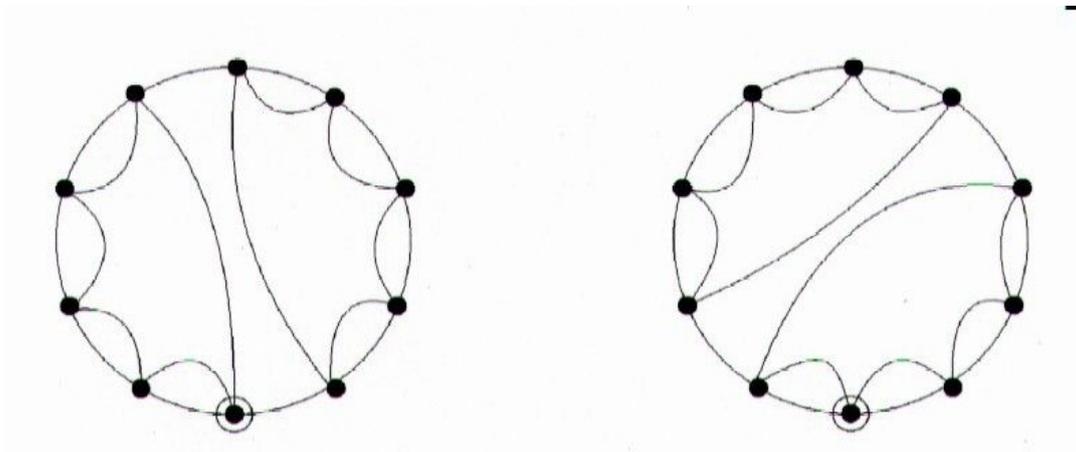
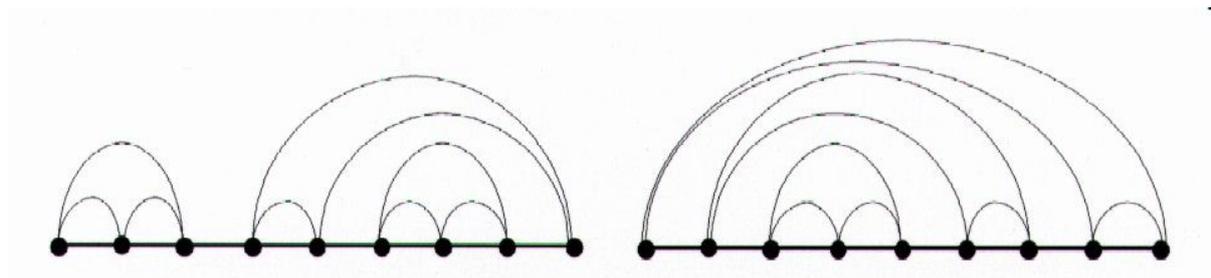


Abbildung 41: Beispiele für sich nicht schneidende Verbindungen von Punkten auf einem Kreis

6.10 Sich nicht schneidende Verbindungen von $(k+1)n$ Punkten auf einer Linie

Wieviele Möglichkeiten gibt es, $(k+1) \cdot n$ Punkte auf einer Linie oberhalb dieser so zu verbinden, daß immer genau $(k+1)$ Punkte miteinander verbunden sind (von jedem Punkt gehen höchstens zwei Verbindungslinien weg!) und daß sich die Verbindungslinien nicht schneiden?

Auch hier will ich einige Beispiele angeben:
Im Fall $k = 2, n = 3$ wäre z.B. möglich:



Oder für $k = 4, n = 3$ z.B. :

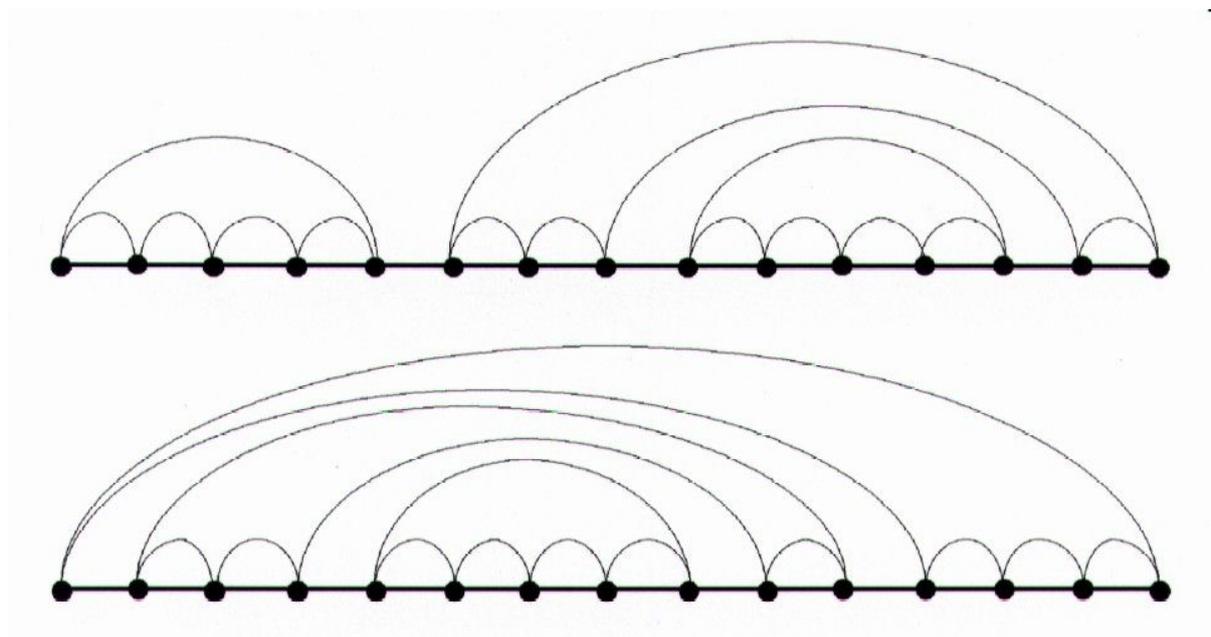


Abbildung 42: Beispiele für sich nicht schneidende Verbindungen von Punkten auf einer Linie

6.11 Planare Reimschemata aus k -fachen Reimen

Wie groß ist die Anzahl der möglichen verschiedenen planaren Reimschemata aus k -fachen Reimen ($k \cdot n$)-zeiliger Verse?

Ein k -facher Reim besteht aus k Zeilen, die sich alle miteinander reimen. So wäre z.B.

**Und sieh und sieh! An weißer Wand
Da kam's hervor wie Menschenhand
Und schrieb und schrieb an weißer Wand
Buchstaben von Feuer und schrieb und verschwand
Die Magier kamen, doch keiner verstand
Zu deuten die Flammenschrift an der Wand.**

ein 6-facher Reim (Aus "Belsazar" von HEINRICH HEINE).

- Für $k = 2, n = 3$ ergeben sich als Antwort auf unsere Frage 12 Möglichkeiten, einen 6-zeiligen Vers aus zweifachen Reimen so zusammensetzen, daß keine Kreuzreime dabei sind und so eben nur planare Reimschemata entstehen:

aaaaaa , aaaabb , aaabba , aabbaa , abbaaa , aabbbb ,
abbbba , aabbcc , abbcca , abbacc , aabccb , abccba .

Achtung! ababb , ababaa , abbbab oder ababbb sind alles Kreuzreime!

- Für $k = 3, n = 3$ gibt es 22 Möglichkeiten, einen 9-zeiligen Vers aus dreifachen Reimen planar zusammensetzen:

aaaaaaaa , aaaaaabbb , aaaaabbba , aaaabbbbaa , aaabbbaaa , aabbbaaaa ,
abbbaaaaa , aaabbbbb , aabbbbbba , abbbbbbaa , aaabbbccc , aabbbccca ,
abbbcccaa , aaabbbccb , aabbbccba , abbbccbaa , aaabcccbb , aabcccbbba ,
abcccbbba , aabbbacc , abbaacc , abbbacca .

6.12 Vorwärts- und Rückwärtsschritte mit beweglicher Wand

Um die Fragestellung 2.13 zu verallgemeinern, müssen wir die Situation aus 2.13 etwas verändern. Statt einer festen Mauer wollen wir uns nun eine bewegliche Wand denken, die uns sozusagen in "bedrohlicher Weise" langsam folgt.

Wir stellen uns vor, wir stünden mit dem Rücken an einer beweglichen, unüberwindbaren Wand und sollten nach insgesamt $(k + 1) \cdot n$ Vorwärts- und Rückwärtsschritten wieder genau an der Wand stehen. Wieviele verschiedene Schrittfolgen, um dieses Ziel zu erreichen, gibt es, wenn sich die Wand für jeden Schritt den wir tun, um $\frac{k-1}{k+1}$ Schritte nach vorne bewegt?

Genauso wie in 2.13 können wir dies wieder umformulieren, indem wir eine Zahlensequenz aus $(k + 1) \cdot n$ Einträgen betrachten:

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{(k+1) \cdot n}$, wobei gelten muß:

$$x_i = \pm 1 \quad , \quad \sum_{i=1}^{(k+1) \cdot n} x_i = (k-1) \cdot n \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^l x_i \geq \frac{k-1}{k+1} \cdot l \quad \text{für} \quad 1 \leq l \leq (k+1) \cdot n.$$

Somit lautet unsere Frage:

Wieviele verschiedene Sequenzen dieser Art gibt es ?

Betrachten wir z.B. den Fall $k = 4, n = 2$.

Wir suchen also Zahlensequenzen mit $(4 + 1) \cdot 2 = 10$ Einträgen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$, wobei gelten muß:

$$x_i = \pm 1 \quad , \quad \sum_{i=1}^{10} x_i = 6 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^l x_i \geq \frac{3}{5} \cdot l \quad \text{für} \quad 1 \leq l \leq 10.$$

Zum Beispiel haben die Zahlensequenzen

$$1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 \quad \text{und} \quad 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

zwar die Summe 6, erfüllen aber nicht die letztere Partialsummenbedingung, denn :

$$1 + 1 - 1 = 1 \not\geq \frac{6}{5} \quad \text{bzw.} \quad 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 = 2 \not\geq \frac{18}{5}.$$

Von den insgesamt $\binom{10}{2} = 45$ Möglichkeiten solcher Zahlensequenzen, die als Summe 6 haben, fallen alle bis auf 5 der Partialsummenbedingung zum Opfer und es bleiben übrig:

$$\begin{aligned} &1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 && 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \\ &1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 && 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1 \\ &1 + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 \end{aligned}$$

Genauso wie in 2.13 wollen wir so eine Schrittfolge wieder mit einer Sequenz aus Einsen und Nullen darstellen. "1" bedeutet vorwärts (bzw. "+1") und "0" rückwärts(bzw. "-1").

Zur besseren Veranschaulichung dient die zeichnerische Betrachtung in Abbildung 43.

In unserem Fall haben wir die Situation:

"Wir stehen mit dem Rücken an einer beweglichen, unüberwindbaren Wand und sollen nach insgesamt 10 Vorwärts- und Rückwärtsschritten wieder genau an der Wand stehen. Wieviele verschiedene Schrittfolgen, um dieses Ziel zu erreichen, gibt es, wenn sich die Wand für jeden Schritt den wir tun, um $\frac{3}{5}$ Schritte nach vorne bewegt?"

Oben in Abbildung 43 ist jeweils die Position der beweglichen Wand nach dem jeweiligen Schritt, der darunter in der gleichen Schraffierung angegeben ist, zu sehen. Über die Position der Wand nach dem darauffolgenden Schritt können wir jeweils mit dem darauffolgenden Schritt nicht zurück.

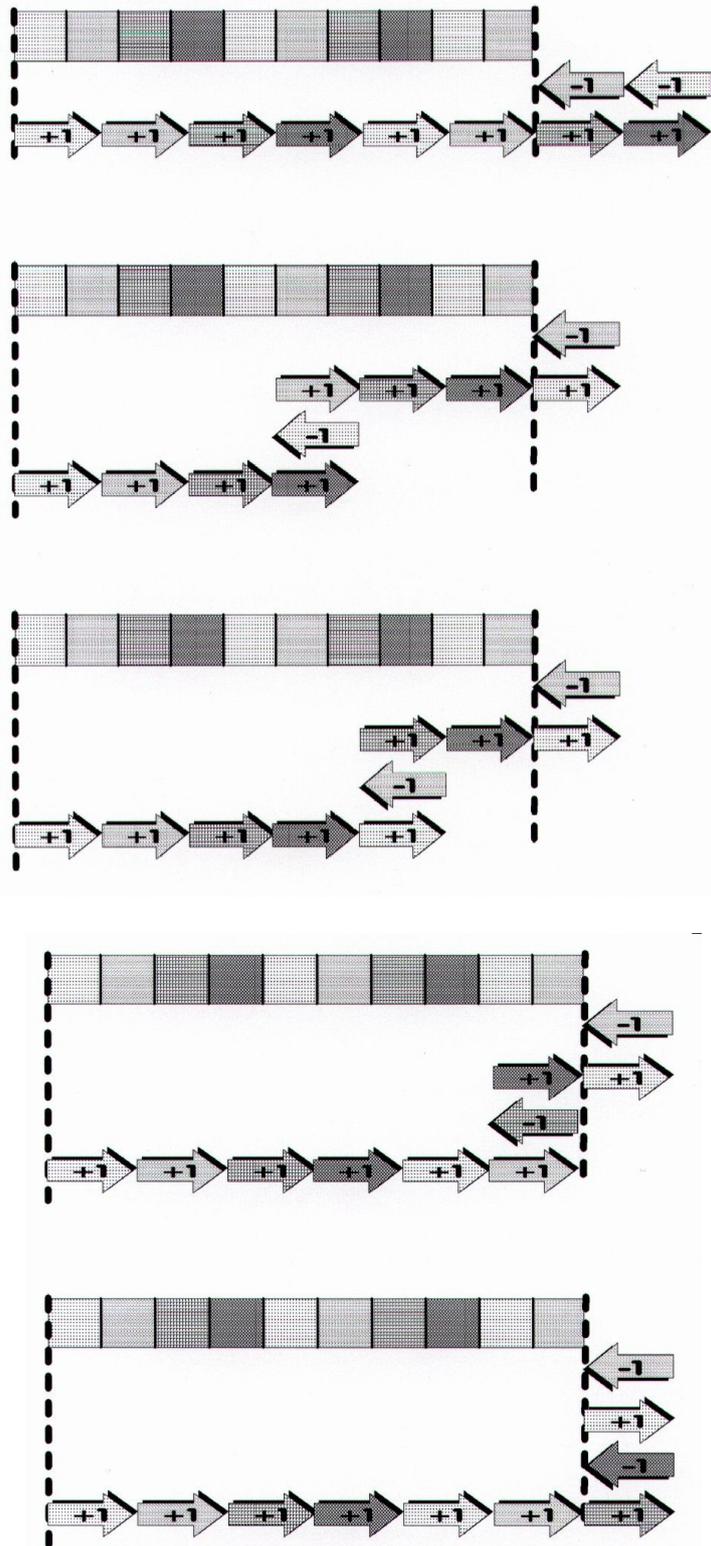


Abbildung 43: Vorwärts- und Rückwärtsschritte mit beweglicher Wand im Fall $k = 4, n = 2$

7 Äquivalenz der verschiedenen Interpretationen der Catalan-Zahlen k -ten Grades

Zur Untermauerung der Formeln (34),(35) und (41) aus Kapitel 6 müssen wir jetzt noch zeigen, daß es sich hierbei auch wirklich um die Catalan-Zahlen k -ten Grades handelt, die wir am Anfang des Kapitels 6 und in 6.2 definiert haben.

Dazu werde ich zeigen, daß alle Fragestellungen aus Kapitel 6 als Lösung genau die Zahlenfolge haben, die wir als verallgemeinerte Catalan-Zahlenfolge definiert haben.

Für das verallgemeinerte Catalansche Problem (6.1), das Problem der Gitterwege unter Nebenbedingungen (6.3) und die Frage nach der Anzahl der $(k+2)$ -valenten ebenen Wurzelbäume (6.7) haben wir ja bereits gezeigt, daß (34) die Antwort auf jedes dieser Probleme liefert und sie deshalb äquivalente Fragestellungen sind (gestrichelte Äquivalenzpfeile im Beweisschema).

Ich möchte nach folgenden Beweisschema vorgehen:

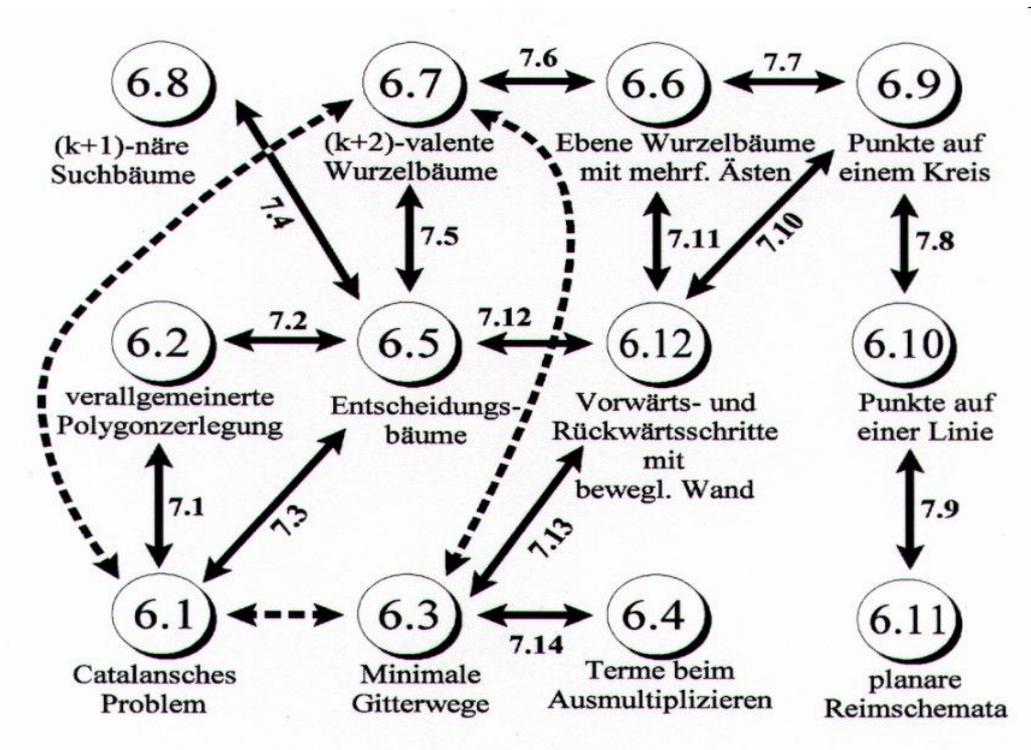


Abbildung 44: schematische Beweisübersicht

Auch liegt mir wieder daran, eventuell sogar verschiedene Beweismöglichkeiten vorzustellen.

Als erstes wäre endlich zu beweisen:

7.1 6.1 \Leftrightarrow 6.2

Dabei gehen wir genauso vor wie in 5.1 für den Fall $k = 1$. Zuerst definieren wir uns eine Seite des $(kn + 2)$ -Ecks, welches wir in $(k + 2)$ -Ecke zerlegen wollen, als Grundseite und die anderen benennen wir im Uhrzeigersinn alphabetisch durch. Nun werden alle Diagonalen von außen nach innen zur Grundseite hin so benannt, daß die Namen der $(k + 1)$ anliegenden Seiten bzw. Diagonalen in Klammern zusammengefasst werden. Dies zieht sich durch das $(kn + 2)$ -Eck hindurch bis letztlich die Grundseite benannt wird. Diese Bezeichnung der Grundseite ist eindeutig für diese Polygonzerlegung und stimmt mit genau einer Klammerungsmöglichkeit des Problems 6.1 überein. Die folgende Abbildung wird dies verdeutlichen:

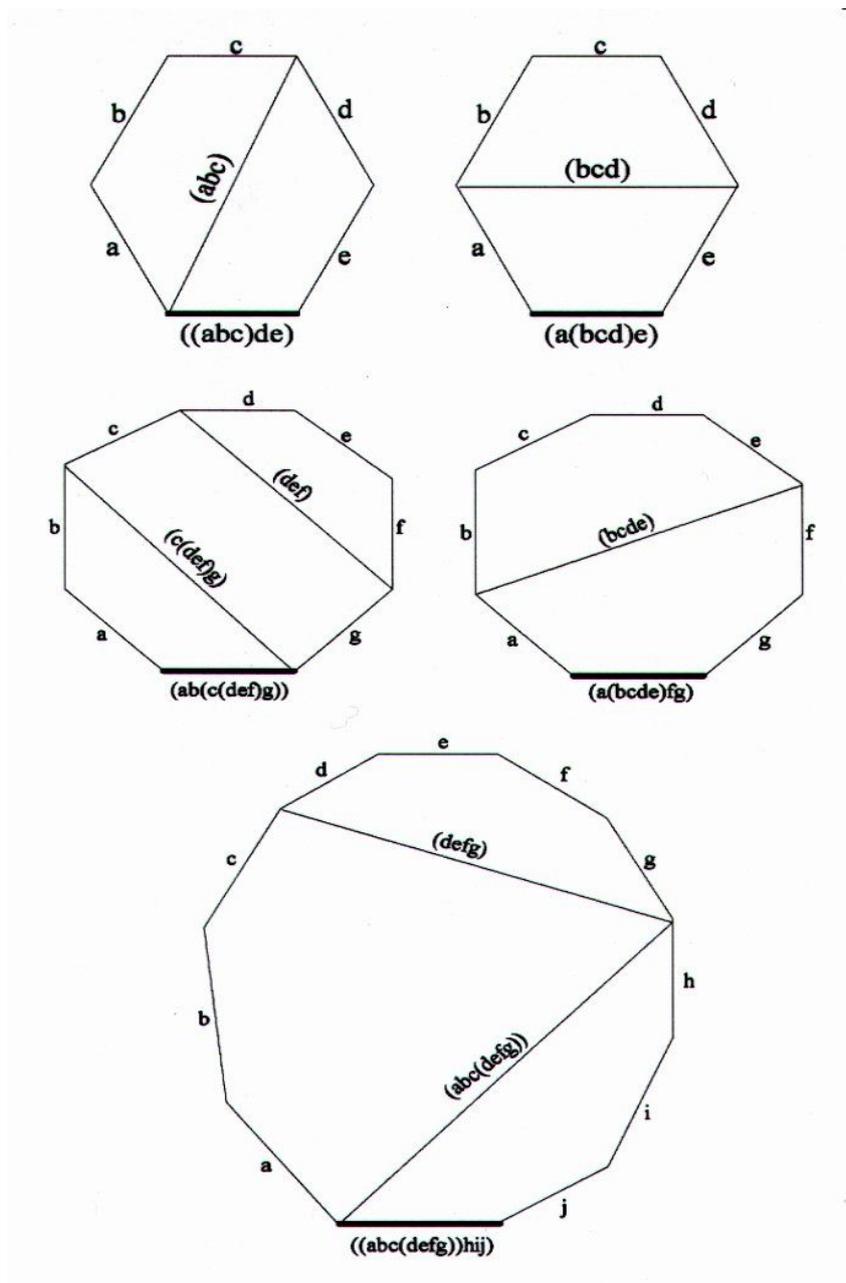


Abbildung 45: Bijektive Beziehung zwischen verallgemeinerter Polygonzerlegung und verallgemeinertem Catalanischen Problem

Somit haben wir also eine Bijektion zwischen der Menge der Zerlegungen eines $(kn + 2)$ -Ecks in $(k + 2)$ -Ecke und der Menge der Möglichkeiten, ein Produkt aus $kn + 1$ Faktoren zu $(k + 1)$ -Tupel geklammert zu berechnen.

Die Antwort auf das verallgemeinerte Polygonzerlegungsproblem ist also tatsächlich auch durch $C_n^{(k)} = \frac{1}{kn+1} \binom{(k+1)n}{n}$ gegeben. Wir haben somit die Beziehung (34) bewiesen.

7.2 6.2 \Leftrightarrow 6.5

Auch hier gehen wir analog zu 5.2 vor: Der Ausgangspunkt sei eine Zerlegung eines $(kn + 2)$ -Ecks in $(k + 2)$ -Ecke. Wieder definieren wir uns eine Seite des $(kn + 2)$ -Ecks als Grundseite, durch welche wir in das Grund- $(k + 2)$ -Eck gelangen, in welchem der Ausgangspunkt für den allgemeinen Entscheidungsbaum $(k + 1)$ -ten Grades zu liegen kommt. Jedes Zerlegungs- $(k + 2)$ -Eck kennzeichnen wir mit einem Kringel, indem sich die Äste des Entscheidungsbaumes so verzweigen, daß jede Seite (mit Ausnahme der Grundseite im Grundeck) des Zerlegungs- $(k + 2)$ -Ecks von genau einem Ast geschnitten wird. Auf diese Weise erhalten wir für jede Polygonzerlegung eines $(kn + 2)$ -Ecks genau einen Entscheidungsbaum $(k + 1)$ -ten Grades mit $kn + 1$ Endpunkten und umgekehrt:

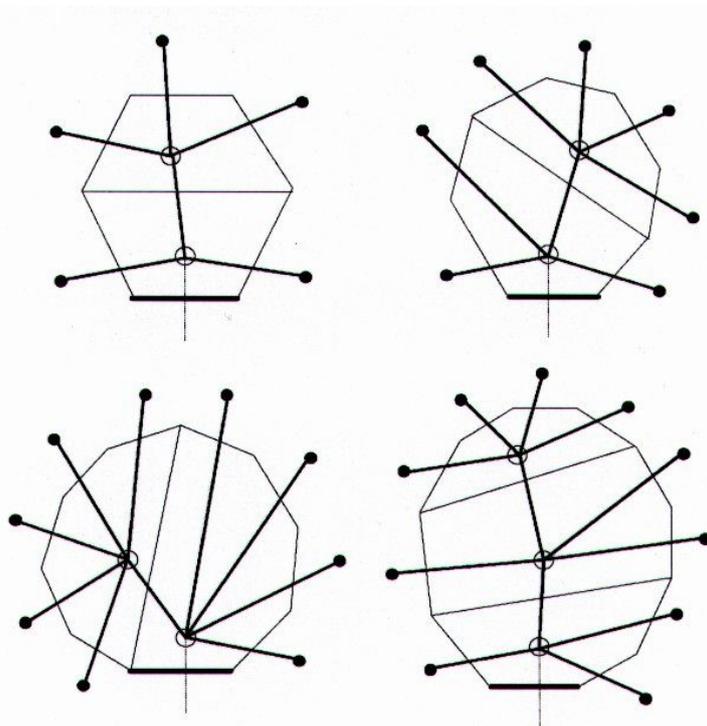


Abbildung 46: Bijektive Beziehung zwischen verallgemeinerter Polygonzerlegung und allgemeinen Entscheidungsbäumen

Somit ergibt sich die Anzahl der allgemeinen Entscheidungsbäume auch die verallgemeinerte Catalan-Zahlenfolge. Es gibt also $C_n^{(k)}$ Entscheidungsbäume $(k + 1)$ -ten Grades mit $kn + 1$ Endpunkten.

7.3 6.1 \Leftrightarrow 6.5

Durch einfache Verallgemeinerung des Vorgehens von 5.3 sehen wir, daß die Anzahl der allgemeinen Entscheidungsbäume $(k + 1)$ -ten Grades mit $kn + 1$ Endpunkten gleich der Anzahl der Möglichkeiten, ein Produkt aus $kn + 1$ Faktoren zu $(k + 1)$ -Tupel geklammert zu berechnen, ist - also wieder $C_n^{(k)}$.

Dazu noch zwei Beispiele (eines Entscheidungsbaumes 4.Grades mit 7 Endpunkten und eines Entscheidungsbaumes 5.Grades mit 13 Endpunkten):

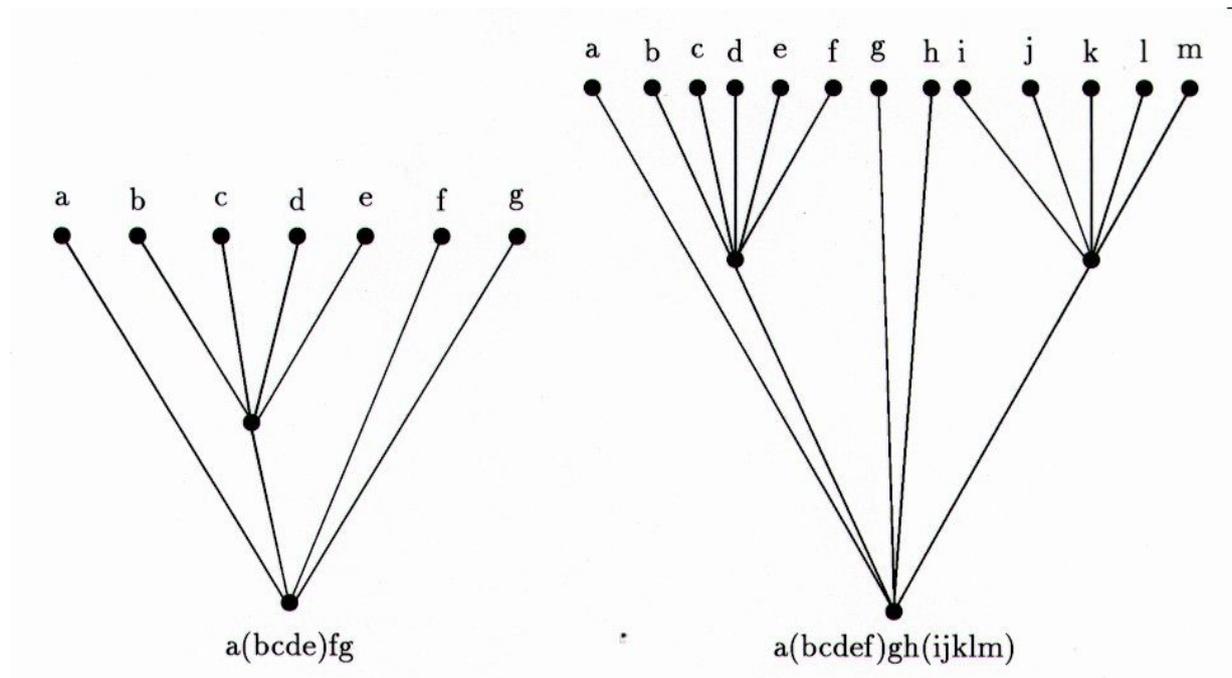


Abbildung 47: Bijektive Beziehung zwischen verallgemeinertem Catalanschen Problem und allgemeinen Entscheidungsbäumen

7.4 6.5 \Leftrightarrow 6.8

Wiederum ist diese Äquivalenz der Fragestellungen nach den $(k + 1)$ -nären Suchbäumen und den allgemeinen Entscheidungsbäumen einfach durch Verallgemeinerung des im Kapitel 5.4 Gesagten zu erkennen.

Es gibt somit auch $C_n^{(k)}$ $(k + 1)$ -näre Suchbäume mit n Ecken.

Zwei Beispiele:

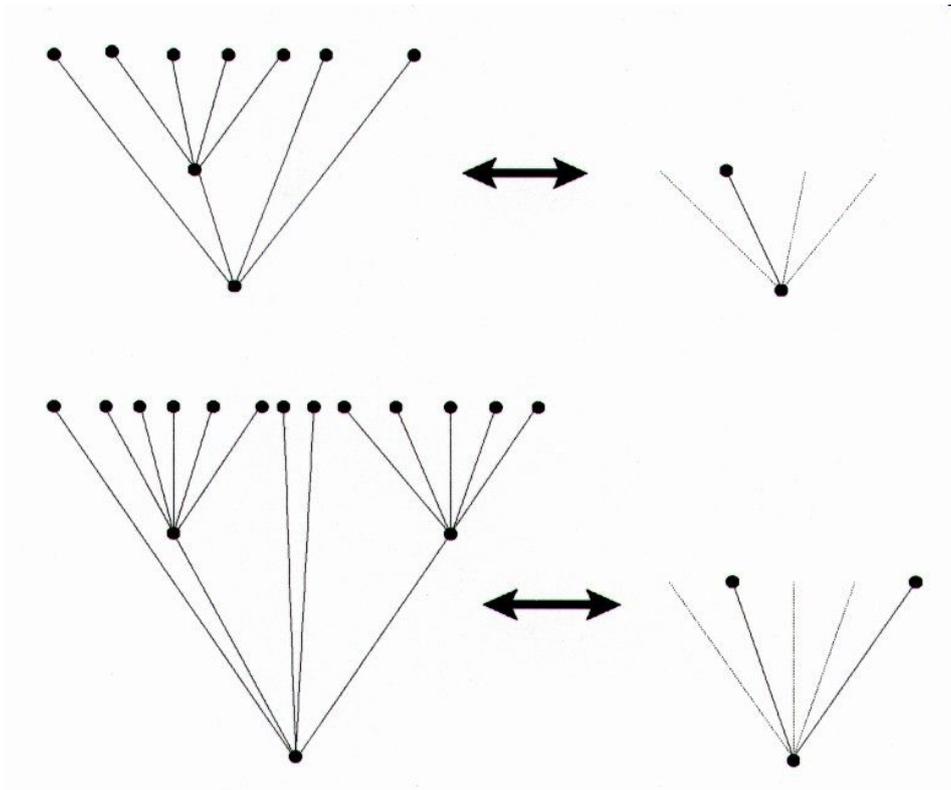


Abbildung 48: Bijektive Beziehung zwischen allgemeinen Entscheidungsbäumen und $(k + 1)$ -nären Suchbäumen

7.5 6.5 \Leftrightarrow 6.7

Wir können jedem $(k+2)$ -valenten ebenen Wurzelbaum mit n Verzweigungspunkten genau einen Entscheidungsbaum $(k+1)$ -ten Grades mit $kn+1$ Endpunkten zuordnen, indem wir die Wurzel weglassen und die Äste zu den Endpunkten so verlängern, daß sie alle auf einer gedachten horizontalen Linie enden. Genauso - nur rückwärts - können wir jedem allgemeinen Entscheidungsbaum genau einen $(k+2)$ -valenten Wurzelbaum zuordnen.

Deswegen ist die gesuchte Anzahl der $(k+2)$ -valenten ebenen Wurzelbäume also auch durch $C_n^{(k)}$ gegeben.

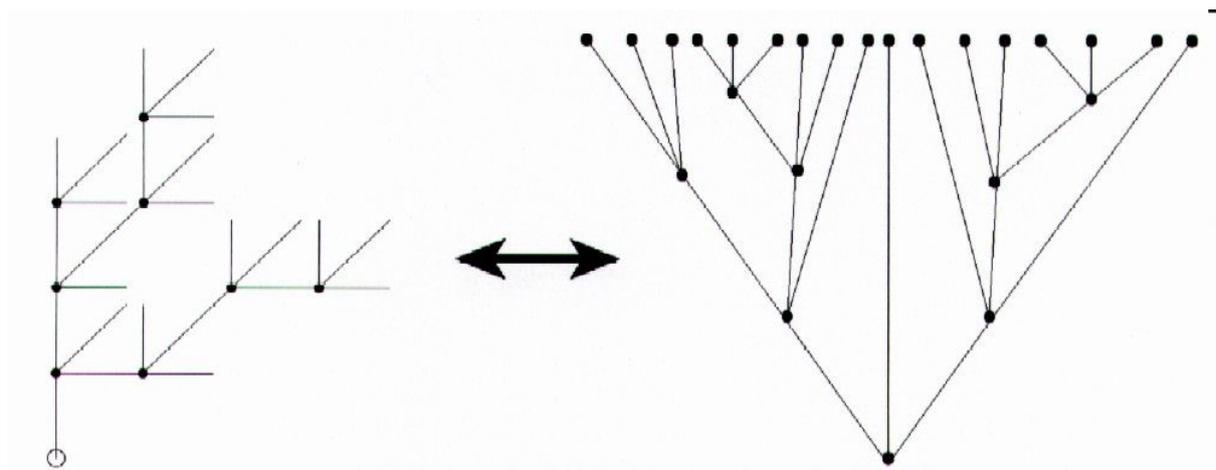


Abbildung 49: Beispiel zur Veranschaulichung der bijektive Beziehung zwischen $(k+2)$ -valenten ebenen Wurzelbäumen und allgemeinen Entscheidungsbäumen

7.6 6.6 \Leftrightarrow 6.7

Jedem $(k+2)$ -valenten ebenen Wurzelbaum mit n Verzweigungspunkten können wir genau einen ebenen Wurzelbaum mit n k -fachen Ästen zuordnen und umgekehrt:

Wir gehen von einem $(k+2)$ -valenten ebenen Wurzelbaum aus.

An die Wurzel fügen wir nach unten noch eine Wurzel hinzu und kennzeichnen alle Zwischenräume der Verzweigungsäste durch kleine gefüllte Vierecke so wie in Abbildung 50. Nun verbinden wir alle Verzweigungspunkte, den Wurzelpunkt und die Kennzeichnungsvierecke so wie in Abbildung 50 rechts durch die gestrichelten Linien dargestellt.

Wir gehen dabei "in einem großen Bogen" gegen den Uhrzeigersinn von rechts nach links durch den Wurzelbaum durch.

Die Verzweigungspunkte des mehrvalenten Wurzelbaums werden nun zu den Verzweigungsstellen der mehrfachen Äste des ebenen Wurzelbaums und die Kennzeichnungsvierecke zu den Endpunkten dieser mehrfachen Äste.

So entsteht der zugehörige ebene Wurzelbaum mit n k -fachen Ästen aus den gestrichelten Linien (Abbildung 50 rechts und unten).

Zurück zum $(k+2)$ -valenten Wurzelbaum gelangen wir, indem wir die Wurzel des ebenen Wurzelbaums aus n k -fachen Ästen abschneiden, und an jedem Verzweigungspunkt des ebenen Wurzelbaums (nicht die Verzweigungsstellen der mehrfachen Äste!) nur den linken Ast bestehen lassen, während die anderen bis zu den jeweiligen Verzweigungsstellen der

entsprechenden mehrfachen Äste wegfallen. Dafür verbinden wir diese Stellen, die zuvor direkt an dieser Verzweigung waren nun waagrecht miteinander (siehe Abbildung 50 links).

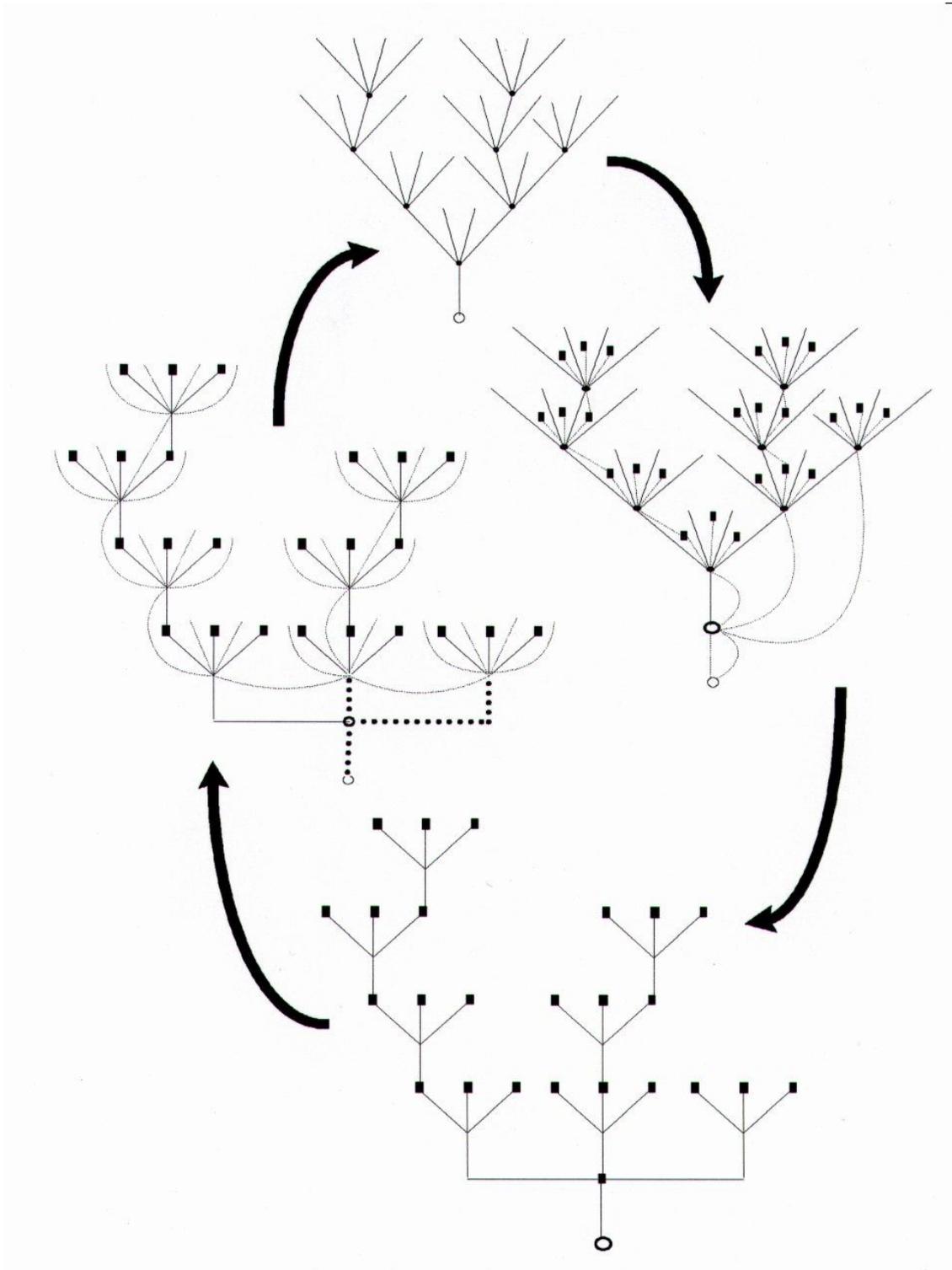


Abbildung 50: Bijektive Beziehung zwischen $(k+2)$ -valenten Wurzelbäumen und ebenen Wurzelbäumen mit n k -fachen Ästen

Zuletzt vervollständigen wir diesen so erhaltenen Baum zum $(k+2)$ -valenten ebenen Wurzelbaum, indem wir an jeder Verzweigungsstelle der mehrfachen Äste Verzweigungen so

anbringen, daß zu jeder 1 Ast von unten hinführt und $k + 1$ Äste nach oben wegführen. Dabei gehen wir nun "in einem großen Bogen" mit dem Uhrzeigersinn von links nach rechts durch den Wurzelbaum durch (wie in Abbildung 50 links die gestrichelten Linien).

Somit wären wir wieder beim Ausgangspunkt angelangt und haben damit gezeigt, daß auch die Anzahl der ebenen Wurzelbäume mit n k -fachen Ästen durch die verallgemeinerte Catalan-Zahl $C_n^{(k)}$ gegeben ist.

Weitere Beispiele zum besseren Verständnis:

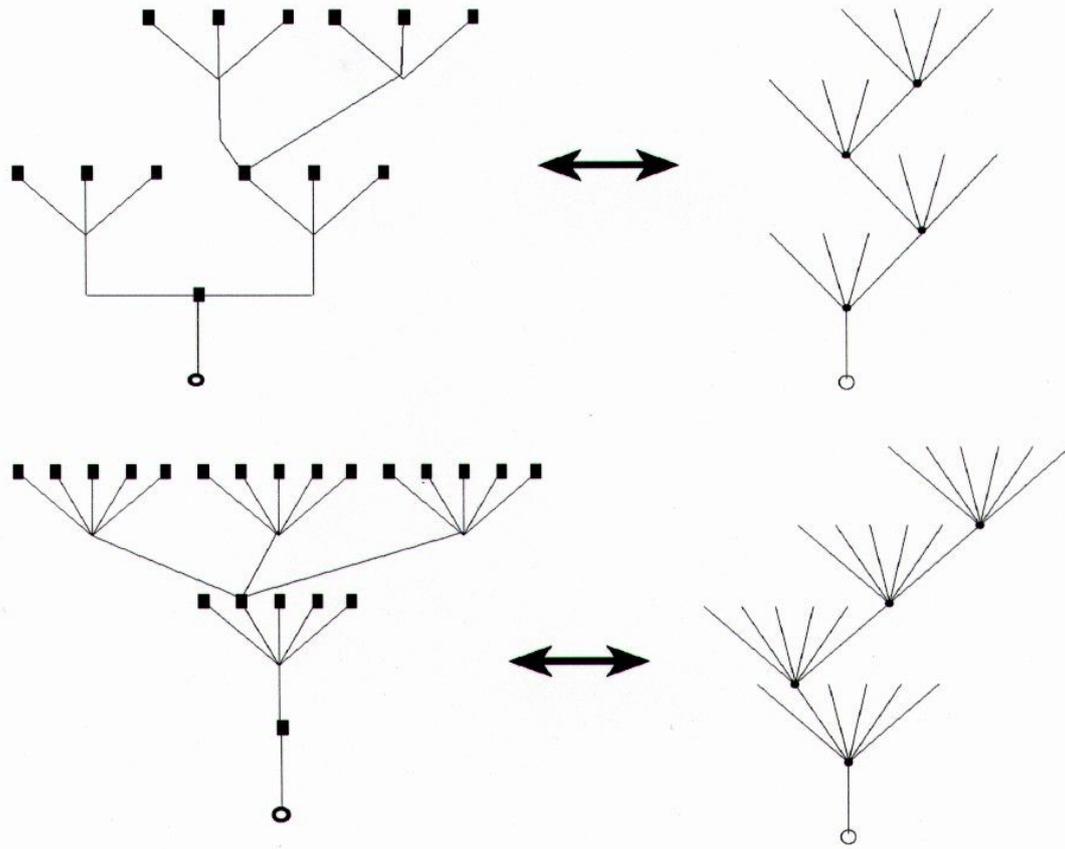


Abbildung 51: Weitere Beispiele zur Beziehung zwischen $(k + 2)$ -valenten Wurzelbäumen und ebenen Wurzelbäumen mit n k -fachen Ästen

7.7 6.6 \Leftrightarrow 6.9

Diese Äquivalenz läßt sich schön mit Hilfe einer Abbildung erklären.

Wir können jedem ebenen Wurzelbaum mit n k -fachen Ästen genau eine Zerlegung eines Kreises mit $(k + 1)n$ Punkten auf der Kreislinie (durch sich nicht schneidende Verbindungen von jeweils $k + 1$ Punkten, wobei von jedem Punkt nur zwei Verbindungslinien ausgehen) zuordnen und umgekehrt:

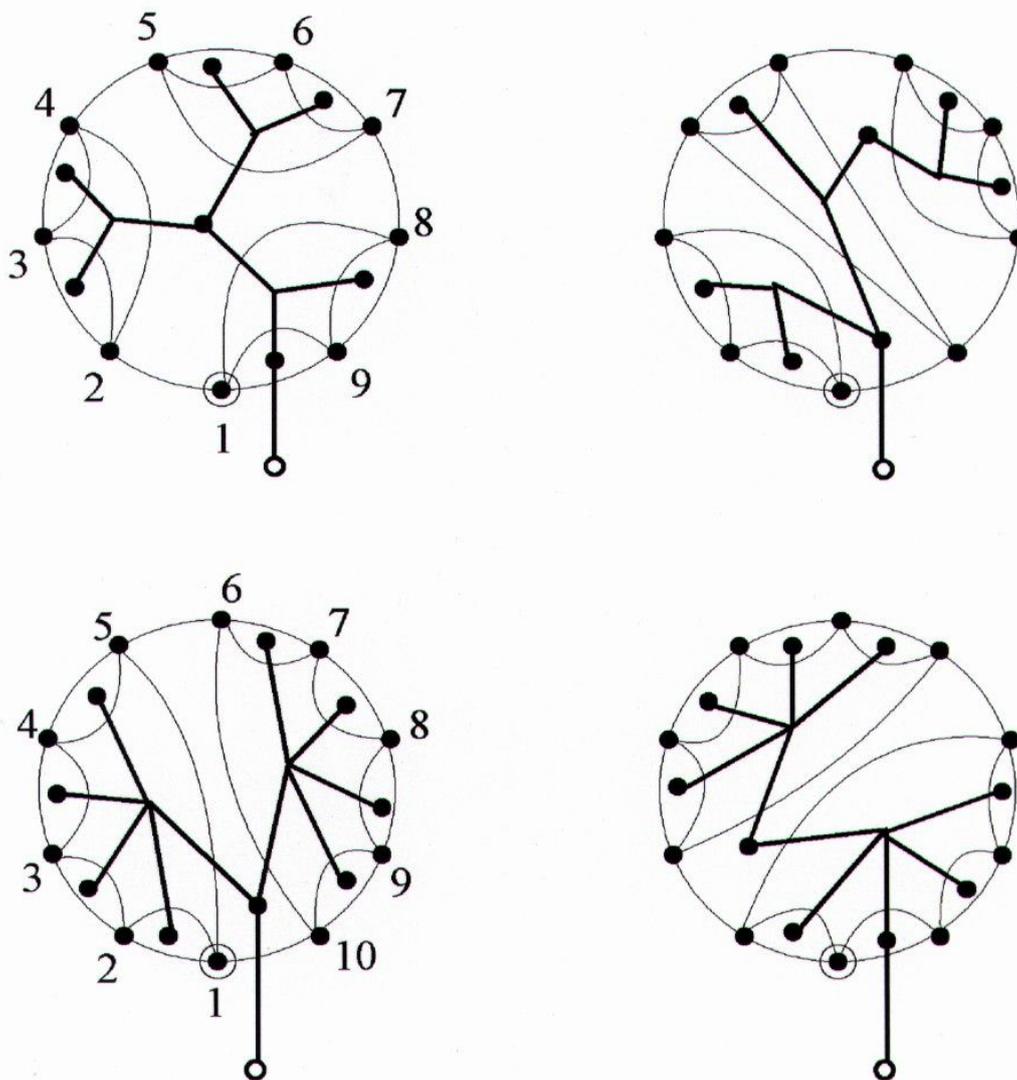


Abbildung 52: Bijektive Beziehung zwischen ebenen Wurzelbäumen mit mehrfachen Ästen und sich nicht schneidenden Verbindungen von $(k + 1)n$ Punkten auf einer Kreislinie

Gehen wir von einem so zerlegten Kreis aus. Die Punkte auf der Kreislinie numerieren wir im Uhrzeigersinn von 1 bis $(k + 1)n$ durch. Das Kreisinnere wird durch die Verbindungslinien in $kn + n + 1$ Teilflächen zerlegt. Jede der Teilflächen, die einen Teil der Kreislinie als Begrenzungslinie hat, markieren wir mit einem Punkt. Nun lassen wir einen ebenen Wurzelbaum so in den Kreis "hineinwachsen", daß die Wurzel die Kreislinie zwischen dem

Punkt 1 und dem Punkt $(k + 1)n$ überquert, und daß der Baum von Markierungspunkt zu Markierungspunkt der Teilflächen so "wächst", daß die Verzweigungsstellen der mehrfachen Äste in den verbleibenden nicht markierten Zerlegungsflächen liegen. So haben wir eine eindeutige Zuordnung in dieser Richtung definiert.

Andersherum gehen wir einfach diesen Weg rückwärts:

Um einen ebenen Wurzelbaum mit n k -fachen Ästen herum ziehen wir eine Kreislinie mit $(k + 1)n$ Punkten, so daß nur die Wurzel außerhalb des Kreises bleibt und die Kreislinie zwischen zwei Punkten schneidet. Gemäß der Verzweigung des Wurzelbaumes und den Verzweigungsstellen der mehrfachen Äste zerlegen wir nun den Kreis durch nicht schneidende Verbindungslinien der Punkte auf dem Kreis so in Teilflächen, daß in jeder Teilfläche mit einem Stück der Kreislinie als Begrenzungslinie genau ein Verzweigungspunkt liegt und daß in den anderen Teilflächen die Verzweigungsstellen der mehrfachen Äste zu liegen kommen.

Die Anzahl der Zerlegungen eines Kreises auf diese Art und Weise entspricht also wiederum der verallgemeinerten Catalan-Zahl $C_n^{(k)}$.

7.8 6.9 \Leftrightarrow 6.10

Durch "Aufschneiden" des Kreises analog zu 5.8 sehen wir ganz leicht eine bijektive Beziehung zwischen den Lösungsmöglichkeiten bei 6.9 und bei 6.10.

Die Anzahl der Möglichkeiten, $(k + 1) \cdot n$ Punkte auf einer Linie oberhalb dieser so zu verbinden, daß immer genau $(k + 1)$ Punkte miteinander verbunden sind (von jedem Punkt gehen höchstens zwei Verbindungslinien weg!) und daß sich die Verbindungslinien nicht schneiden ist somit auch gleich $C_n^{(k)}$.

7.9 6.10 \Leftrightarrow 6.11

Genauso wie in 5.9 nehmen wir die Zeichnungen der Verbindungslinien der Punkte auf der Linie her und malen die Zwischenräume von oben her abwechselnd aus bzw. lassen sie frei. So entsteht wieder ein "Reimbild", dem sich eindeutig ein Reimschema zuordnen läßt:

Es sind jeweils $k + 1$ Punkte miteinander verbunden; dies möchte ich als "Punktgruppe" bezeichnen.

Wir gehen die Punkte auf der Linie von links nach rechts durch und benennen nur jeweils die ersten k linken Punkte einer Punktgruppe mit dem gleichen Kleinbuchstaben. Dies geschieht alphabetisch. Punkte die nicht miteinander verbunden sind, bekommen verschiedene Buchstaben, außer wenn die Punktgruppe direkt links vor dem letzten Punkt der übergreifenden Punktgruppe liegt. Dann bekommt diese Punktgruppe den gleichen Buchstaben wie die übergreifende Punktgruppe.

Zum besseren Verständnis folgende Beispiele (für $k = 2, 3, 4$):

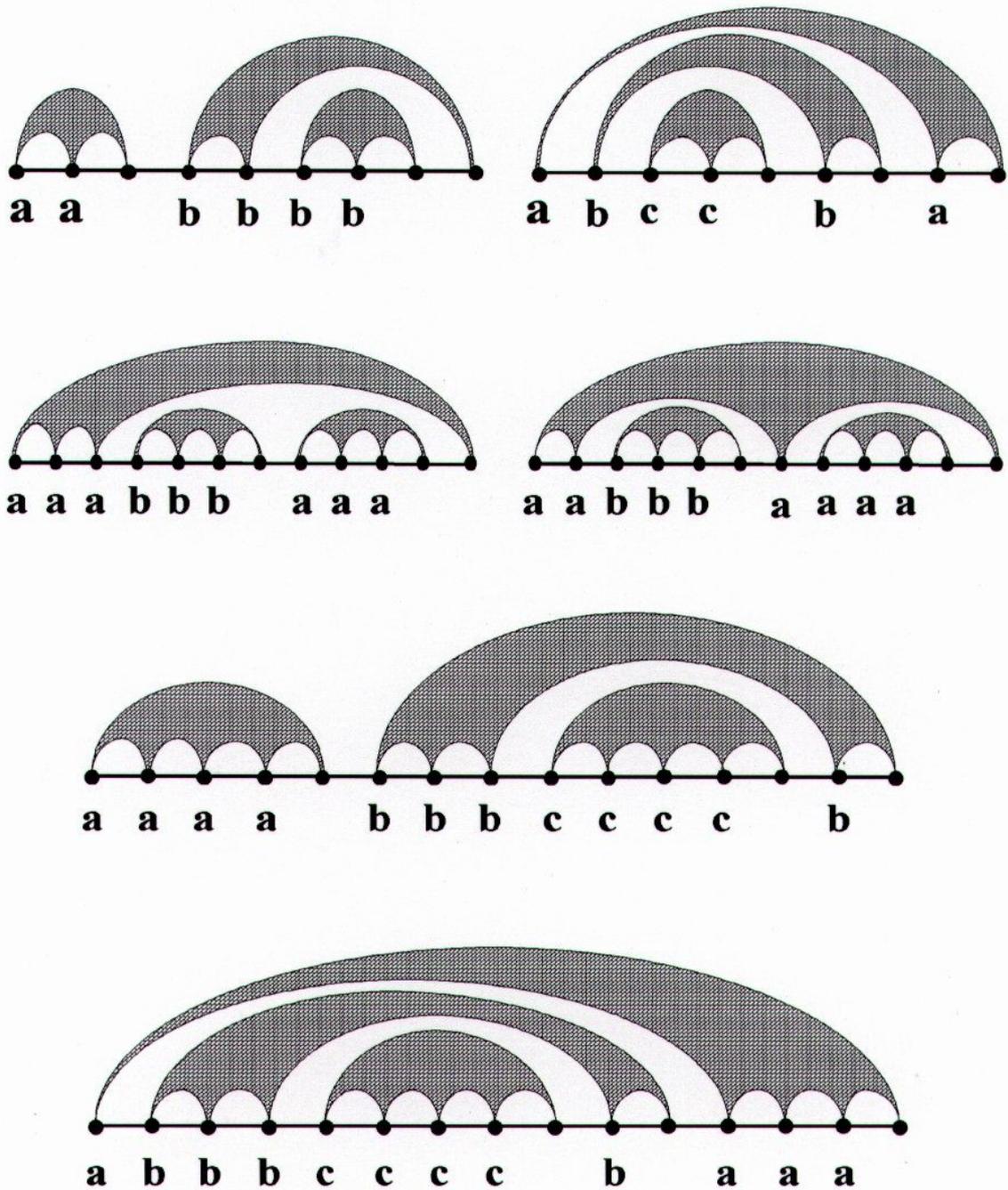


Abbildung 53: Bijektive Beziehung zwischen planaren Reimschemata mit mehrfachen Reimen und sich nicht schneidenden Verbindungen von $(k + 1)n$ Punkten auf einer Linie

Übrigens: Diese Beweismethode ist keine Verallgemeinerung des Beweisweges von 5.9, aber trotzdem funktioniert sie genauso für diesen Fall $k = 1$.

Vom planaren Reimschemata ausgehend können wir rückwärts unter Berücksichtigung der obengenannten Regeln eindeutig das zugehörige Reimbild zeichnen.

Somit haben wir also wieder eine Bijektion zwischen planaren Reimschemata mit k -fachen Reimen und sich nicht schneidenden Verbindungen von $(k + 1)n$ Punkten (je $k + 1$ Punkte

sind miteinander verbunden) auf einer Linie gefunden und deswegen ist die Anzahl der planaren Reimschemata mit k -fachen Reimen auch gleich $C_n^{(k)}$.

7.10 6.9 \Leftrightarrow 6.12

Hierbei gehen wir genauso vor, wie bei 5.12.

Nur müssen wir nun die Punkte auf dem Kreis gegen den Uhrzeigersinn so kennzeichnen, daß die ersten k Punkte von den jeweils $k + 1$ verbundenen Punkten mit einer "1" und der letzte dieser Punkte mit einer "0" versehen wird.

Umgekehrt müssen wir diese Vorschrift beachten, um wieder eindeutig auf eine Sequenz von Einsen und Nullen zu kommen, die eine Folge von Vorwärts- und Rückwärtsschritten mit beweglicher Wand charakterisiert.

Aufgrund dieser Bijektion gibt es $C_n^{(k)}$ verschiedene Schrittfolgen, um nach $(k + 1)n$ Vorwärts- und Rückwärtsschritten mit beweglicher Wand (diese wandert $\frac{k-1}{k+1}$ Schritte pro Schritt nach vorne) wieder an dieser Wand zu stehen.

7.11 6.6 \Leftrightarrow 6.12

Das Vorgehen, um eine Bijektion zwischen ebenen Wurzelbäumen mit k -fachen Ästen und einer Sequenz aus $(k + 1)n$ Vorwärts- und Rückwärtsschritten mit beweglicher Wand zu finden, entspricht im Prinzip dem von 5.13, nur daß hier für jede "Querverbindung" zwischen zwei dem gleichen Ast zugehörigen Endpunkten die zusätzliche Kennzeichnung "q" (für quer) eingeführt wird, die auch einer "1" in der Sequenz der Vorwärts- und Rückwärtsschritte entspricht:

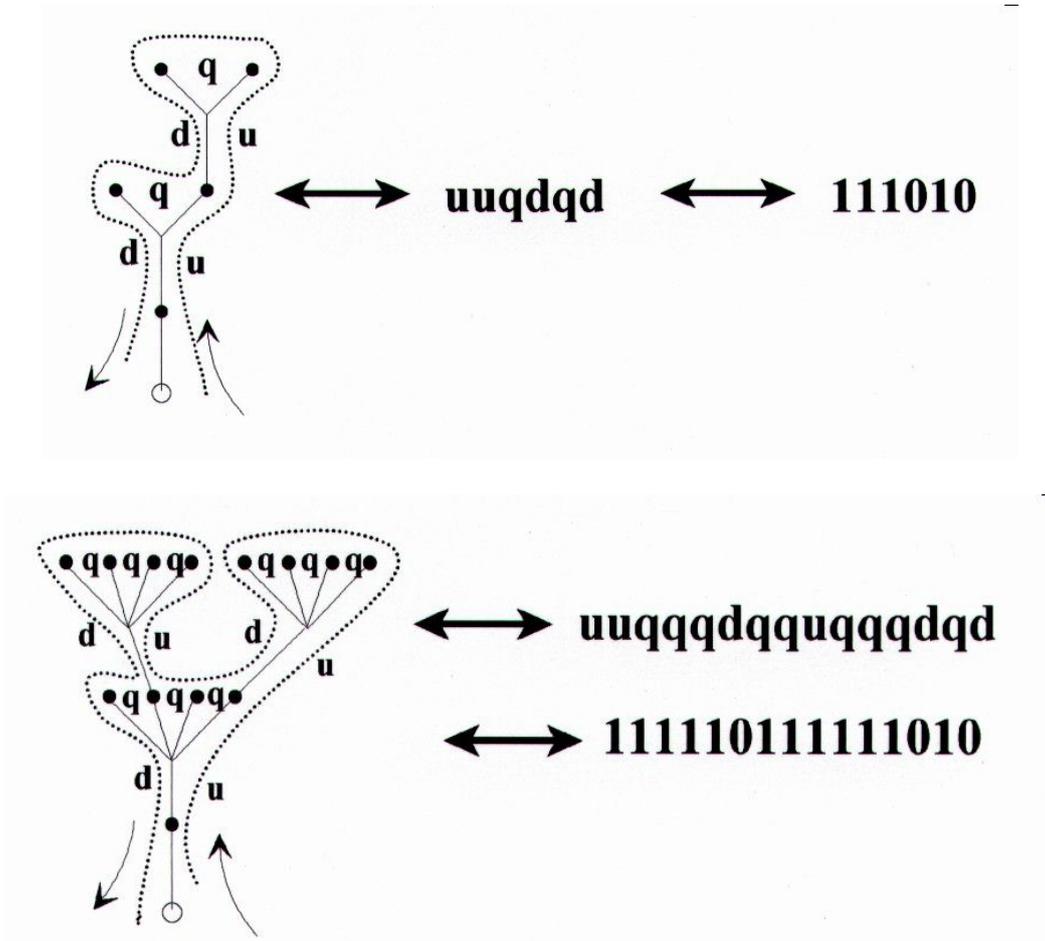


Abbildung 54: Bijektive Beziehung zwischen ebenen Wurzelbäumen mit mehrfachen Ästen und einer Sequenz aus Vorwärts- und Rückwärtsschritten vor einer beweglichen Wand

7.12 6.5 ⇔ 6.12

Hier verallgemeinern wir den Beweis von 5.14, indem wir die ersten k rechten Äste, die aus einem Verzweigungspunkt eines Entscheidungsbaumes $(k + 1)$ -ten Grades mit $kn + 1$ Endpunkten entspringen, mit einem "r" kennzeichnen, und den letzten Ast links mit einem "l" kennzeichnen:

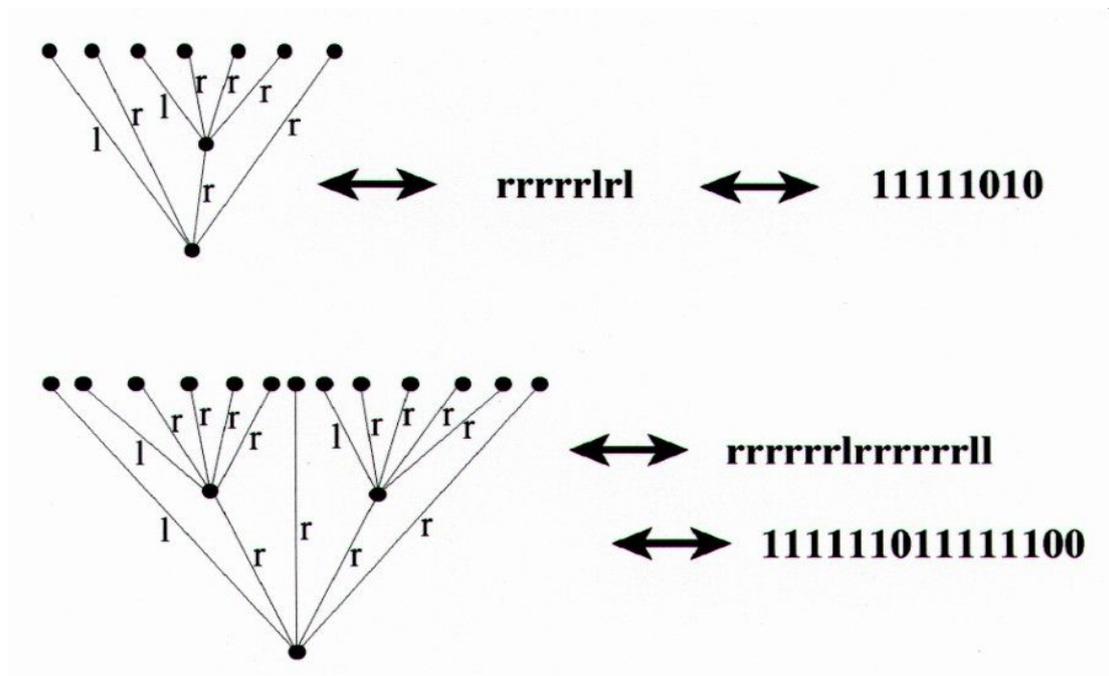


Abbildung 55: Bijektive Beziehung zwischen allgemeinen Entscheidungsbäumen und einer Sequenz aus Vorwärts- und Rückwärtsschritten vor einer beweglichen Wand

7.13 6.3 ⇔ 6.12

Diese Äquivalenz der Fragestellungen beweist man völlig analog zu 5.15.

7.14 6.3 ⇔ 6.4

Jedem Term der beim Ausmultiplizieren des Produkts

$$(x_1)^k(x_1 + x_2)^k(x_1 + x_2 + x_3)^k \cdot \dots \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^k$$

entsteht, können wir genauso wie in 5.16 genau einen minimalen Gitterweg vom Punkt $(0, 0)$ zum Punkt (kn, n) , welcher die Gerade $g : y = \frac{1}{k} \cdot x$ nicht überschreitet, zuordnen.

Die Anzahl dieser Terme ist somit $C_n^{(k)}$.

7.15 Überblick für $k = 2, 3, 4$

Anhand dessen, was wir nun alles in diesem Kapitel gezeigt haben, können wir für die aufgeführten Probleme folgende Übersicht in den einfachsten Fällen (n klein) erstellen: Die Übersicht für den Fall $k = 1$ haben wir bereits im Kapitel 5.19 gesehen.

abc
Catalansches Problem

verallgemeinerte Polygonzerlegung

Entscheidungsbäume

ternäre Suchbäume

4-valente Wurzelbäume

$k=2; n=1$
 $C_1^{(2)}=1$

110
Vorwärts- und Rückwärtsschritte

X_1^2
Terme beim Ausmultiplizieren

Ebene Wurzelbäume

Punkte auf einem Kreis

Punkte auf einer Linie

planare Reimschemata

Minimale Gitterwege

(abc)de

$k=2; n=2$
 $C_2^{(2)}=3$

X_1^4

111100

a(bcde)

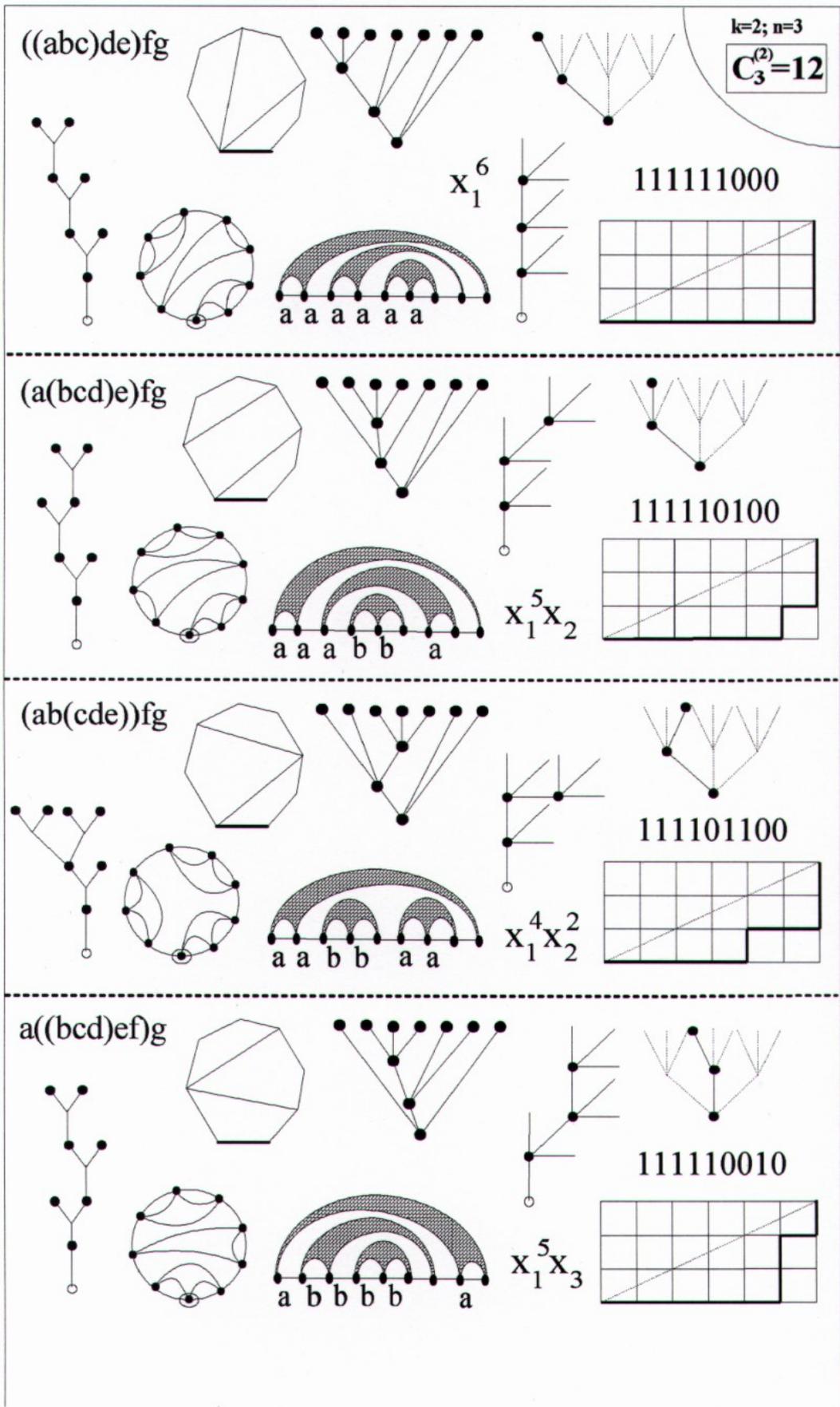
$X_1^3 X_2$

111010

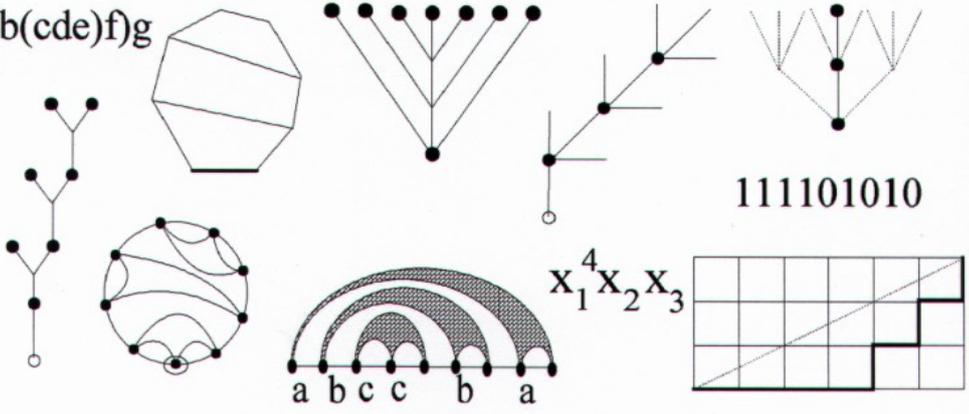
ab(cde)

$X_1^2 X_2^2$

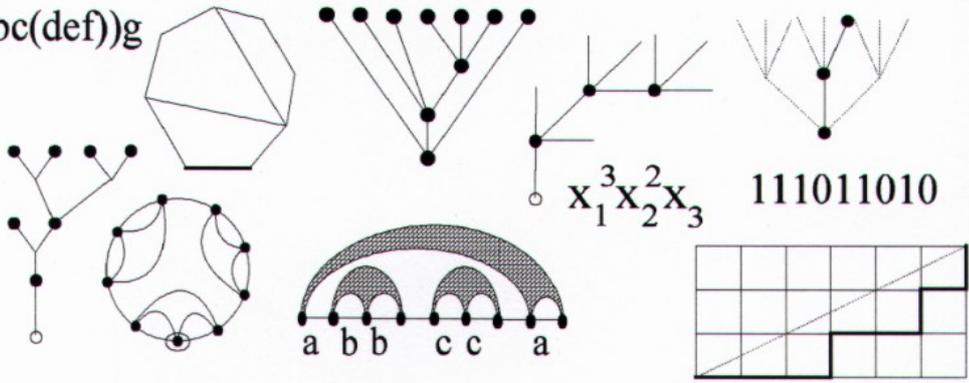
110110



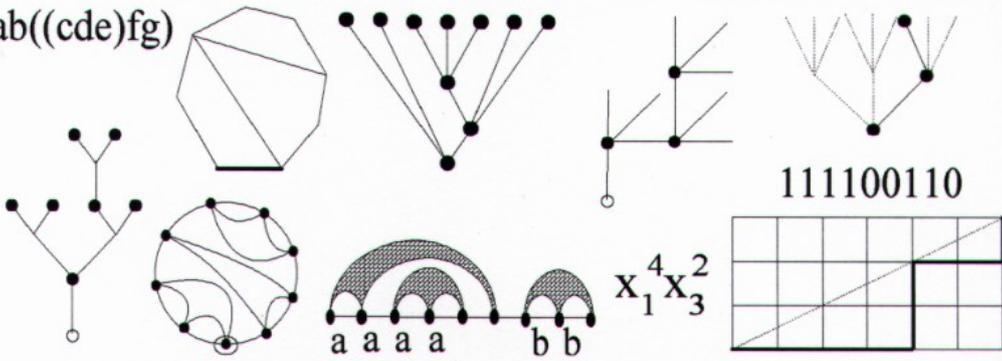
$a(b(cde)fg)$



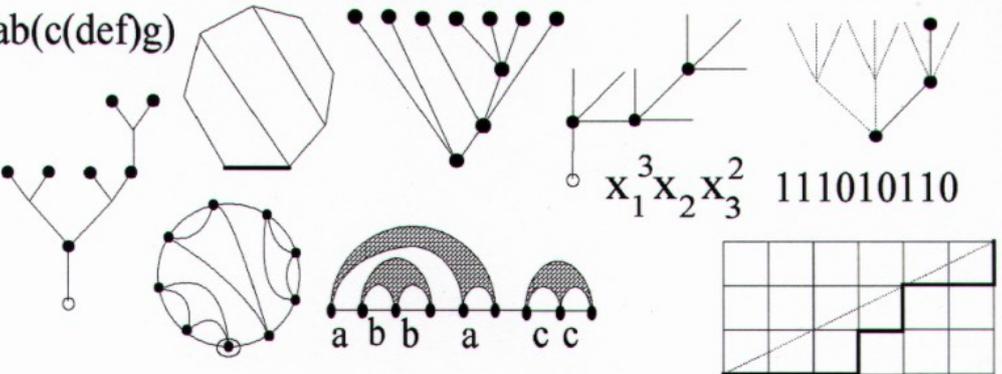
$a(bc(def)g)$

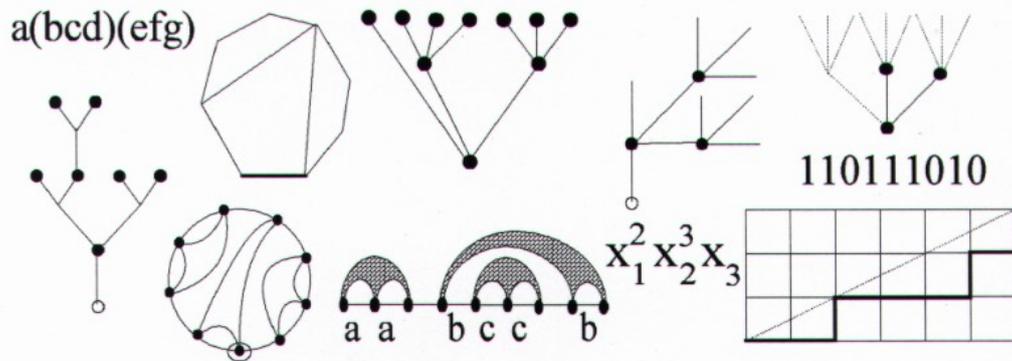
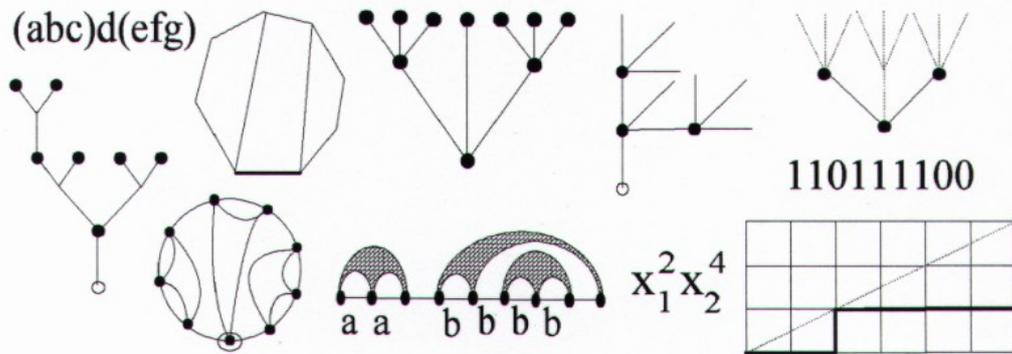
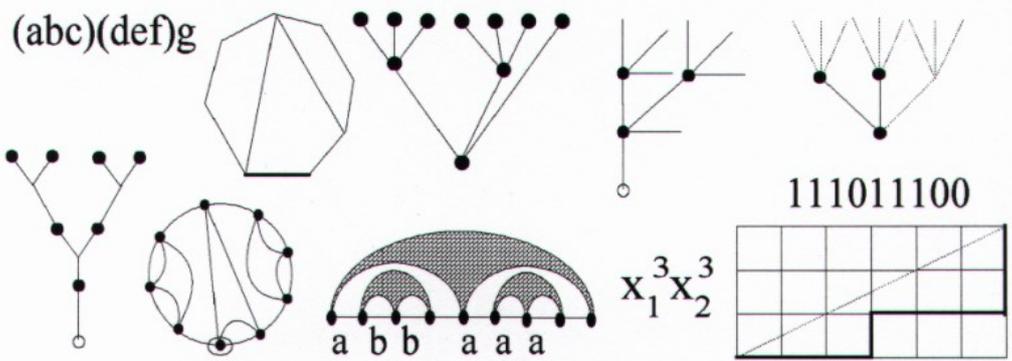
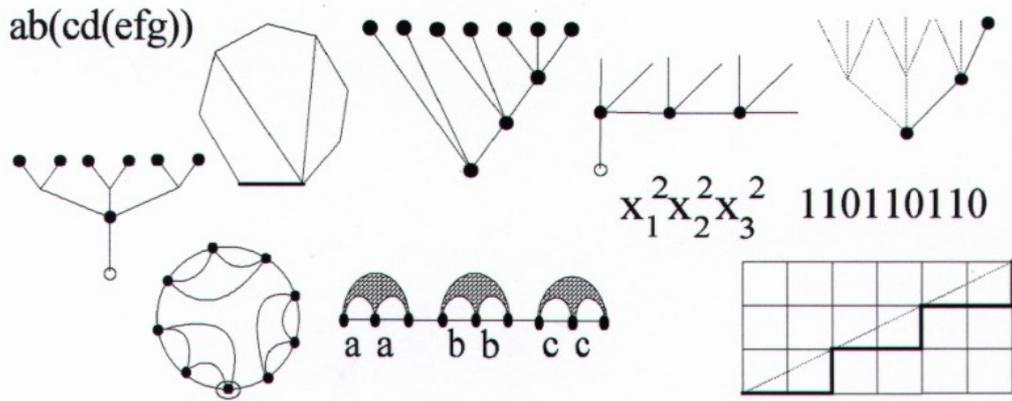


$ab((cde)fg)$



$ab(c(def)g)$





abcd
Catalansches Problem

Polygonzerlegung

Entscheidungsbäume

4-näre Suchbäume

5-valente Wurzelbäume

$k=3; n=1$
 $C_1^{(3)}=1$

1110
Vorwärts- und Rückwärtsschritte

X_1^3
Terme beim Ausmultiplizieren

Ebene Wurzelbäume

Punkte auf einem Kreis

Punkte auf einer Linie

planare Reimschemata

Minimale Gitterwege

(abcd)efg

X_1^6

11111100

$k=3; n=2$
 $C_2^{(3)}=4$

a(bcde)fg

$X_1^5 X_2$

11111010

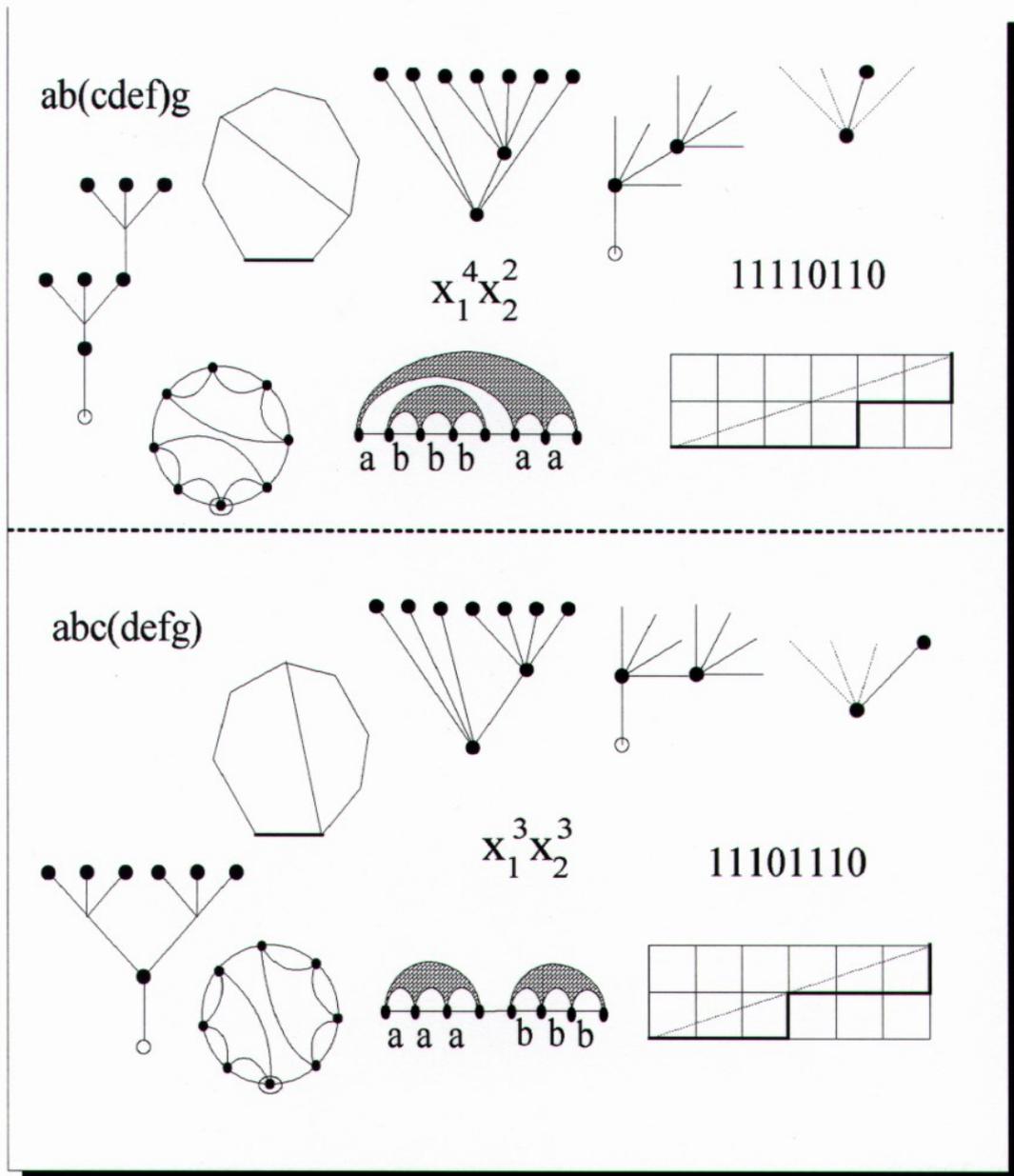
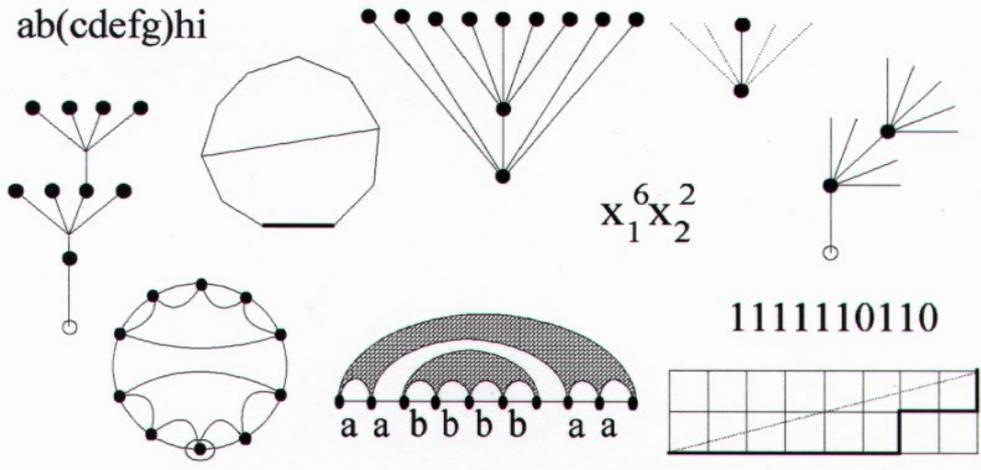
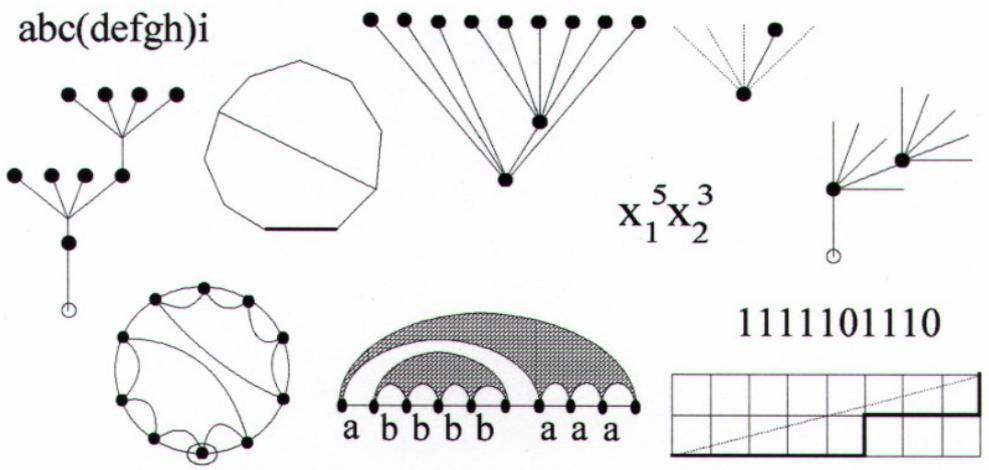


Abbildung 56: Übersicht der Interpretationen der Catalan-Zahlen k -ten Grades für $k = 2; n = 1, 2, 3$, $k = 3; n = 1, 2$ und $k = 4; n = 1, 2$ (auf den folgenden Seiten)

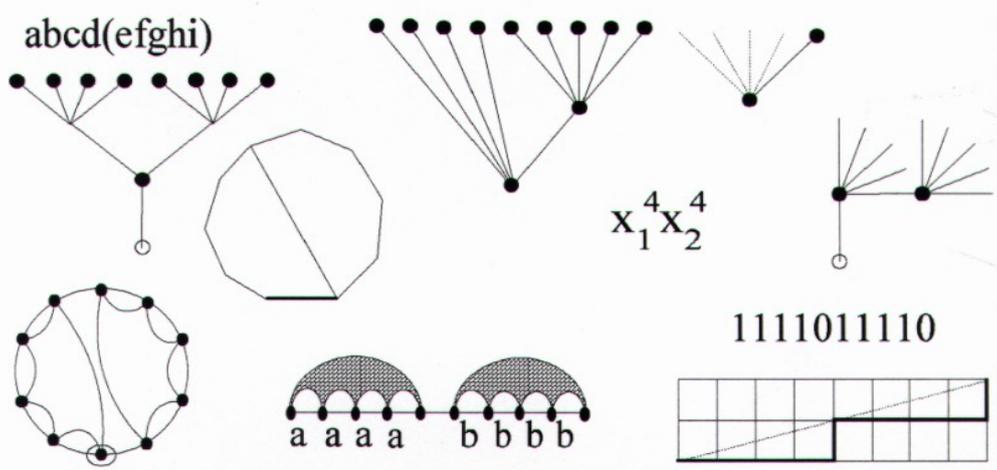
ab(cdefg)hi



abc(defgh)i



abcd(efghi)



8 Ausblicke

Nachdem wir jetzt gesehen haben, wie man ausgehend von der einfachen Fragestellung EULERS nach der Polygonzerlegung in Dreiecke auf viele andere Interpretationen dieses Problems stößt, und sich diese wiederum nur als Spezialfall eines viel allgemeineren Problems auffassen lassen, ist es naheliegend danach zu vermuten, daß sich diese Verallgemeinerung noch weiter betreiben läßt.

In diesem Kapitel möchte ich kurz einige solcher Möglichkeiten vorstellen, ohne näher auf sie einzugehen, was vielleicht den einen oder anderen interessierten Leser ermuntern kann, hier weiterzuforschen.

Zuerst möchte ich hier auf eine eigene Überlegung und Definition von mir eingehen:

8.1 Reine Catalan-Zahlen

Ein 10-Eck läßt sich z.B. **rein** in Dreiecke, in Vierecke, in Sechsecke oder in ein 10-Eck zerlegen.

Eine solche Zerlegung eines Polygons in nur eine Sorte von Vielecken durch Diagonalen bezeichne ich als eine "reine Zerlegung" dieses Polygons.

Wieviele reine Zerlegungen eines 10-Ecks gibt es nun aber?

Um dies zu beantworten, brauchen wir nur die Anzahl der einzelnen reinen Zerlegungsmöglichkeiten aufzusummieren.

Wir haben gesehen, daß es $C_8^{(1)} = 1430$ Zerlegungen in Dreiecke, $C_4^{(2)} = 55$ Zerlegungen in Vierecke, $C_2^{(4)} = 5$ Zerlegungen in Sechsecke und $C_1^{(8)} = 1$ Zerlegung in 10-Ecke gibt. Insgesamt gibt es also $1430 + 55 + 5 + 1 = 1491$ reine Zerlegungen eines 10-Ecks.

Allgemein interessiere uns die Frage:

Wieviele reine Zerlegungen eines $(n + 2)$ -Ecks gibt es ?

Die Zahlenfolge, die die Antwort auf diese Frage ist, möchte ich als Folge der "**reinen verallgemeinerten Catalan-Zahlen**" $({}_r C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen.

Am Anfang des Kapitels 6 haben wir gesehen, daß sich ein $(n + 2)$ -Eck nur in $(m + 2)$ -Ecke rein zerlegen läßt, wobei n ein Vielfaches von m ist ($n, m \in \mathbb{N}$). Anders gesagt muß also m ein Teiler von n sein.

So kommen wir auf folgende Formel für die reinen verallgemeinerten Catalan-Zahlen:

$${}_r C_n = \sum_{m|n} C_m^{\binom{n}{m}} = \sum_{m|n} \frac{1}{n+1} \cdot \binom{n+m}{m} \quad (42)$$

Die Folge $({}_r C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nimmt also folgende Werte an:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
${}_r C_n$	1	3	6	18	43	149	430	1491	4885	17076	58787	209623	742901	2682201	9695866

8.2 Höhere Catalan-Zahlen

Nachdem wir jetzt die reinen Zerlegungen eines Polygons betrachtet haben, interessiert uns jetzt die Frage nach allen möglichen Zerlegungen eines $(m+2)$ -Ecks durch Diagonalen, also auch die gemischten Zerlegungen.

Nehmen wir uns als Beispiel ein $4+2 = 6$ -Eck vor. Gehen wir alle mögliche Zerlegungsarten systematisch durch:

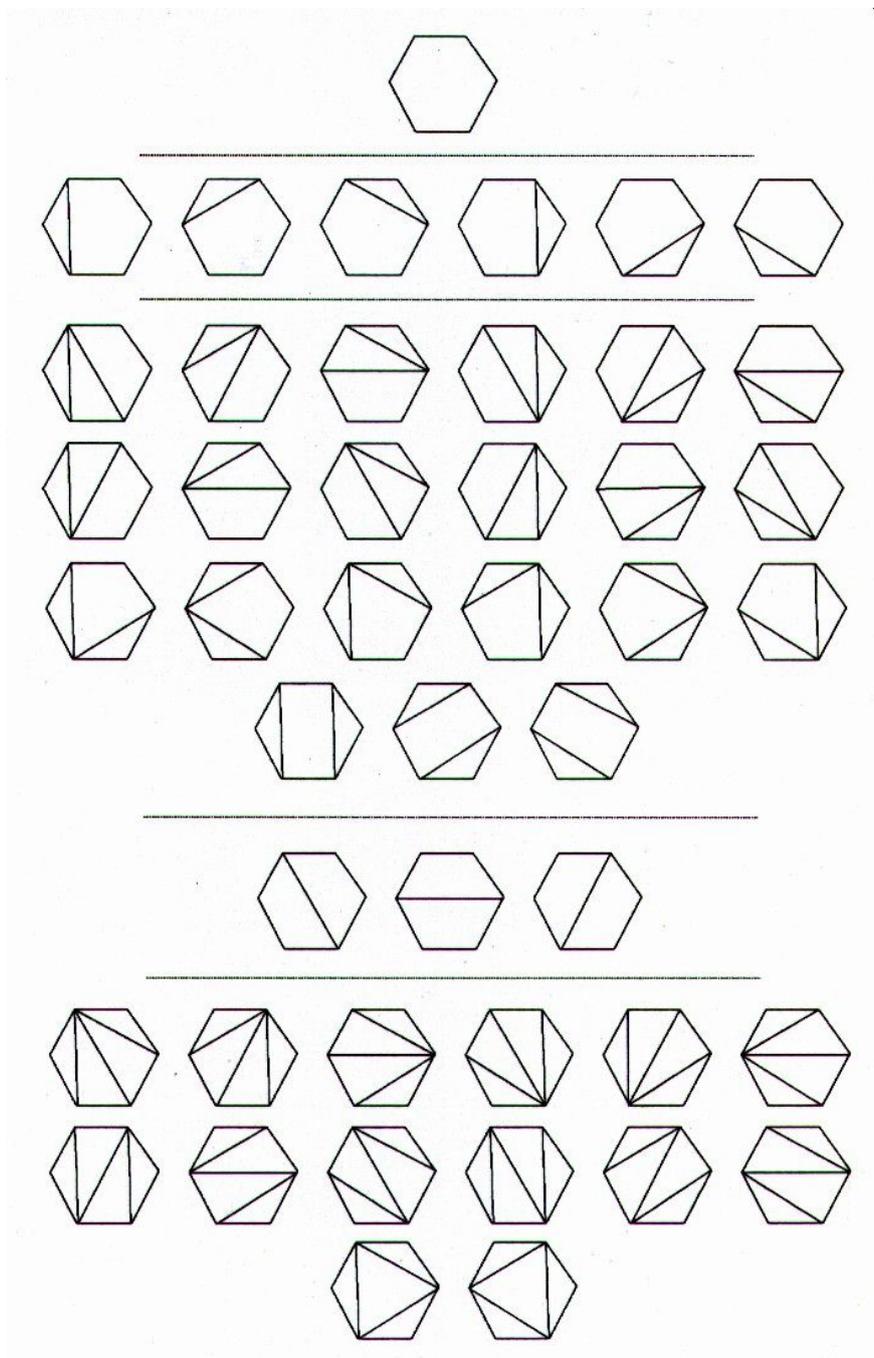


Abbildung 57: Zerlegungen eines Sechsecks

Natürlich können wir ein Sechseck in genau ein Sechseck zerlegen. Danach sehen wir die 6 Möglichkeiten ein Sechseck in 1 Fünfeck und 1 Dreieck zu zerlegen. Es gibt 21 mögliche

Zerlegungen eines Sechsecks in 1 Viereck und 2 Dreiecke und die uns bereits bekannten reinen Zerlegungen in Vierecke und Dreiecke.

Insgesamt gibt es also $1 + 6 + 21 + 3 + 14 = 45$ mögliche Zerlegungen eines Sechsecks.

Den allgemeinen Fall lösten ERDÉLYI und ETHERINGTON in [17]:

Sie behandelten zuerst die Frage nach der Anzahl der Zerlegungen eines $(m + 2)$ -Ecks in n_1 Dreiecke und n_2 Vierecke und n_3 Fünfecke und ... und n_i $(i + 2)$ -Ecke und ... und n_m $(m + 2)$ -Ecke (mit $m \in \mathbb{N}$ und $n_i \in \mathbb{N}_0$):

Für $k = 1 =: k_1 - 1$ hatten wir in Kapitel 6 reine Zerlegungen in Dreiecke erhalten, für $k = 2 =: k_2 - 1$ reine Zerlegungen in Vierecke, für $k = 3 =: k_3 - 1$ reine Zerlegungen in Fünfecke, ... und für $k = m =: k_m - 1$ reine Zerlegungen in $(m + 2)$ -Ecke.

Sei nun

$$\vec{n} := (n_1, n_2, \dots, n_m)$$

der Vektor der jeweiligen Anzahl der Zerlegungspolygone und

$$\vec{k} := (k_1, k_2, \dots, k_m) = (2, 3, \dots, m + 1)$$

der Vektor, der die jeweiligen Zerlegungspolygone festlegt.

Hierbei muß gelten:

$$m = (k_1 - 1)n_1 + (k_2 - 1)n_2 + \dots + (k_m - 1)n_m = 1n_1 + 2n_2 + \dots + mn_m$$

Die gesuchte Anzahl ergibt sich zu:

$$C_{\vec{n}}^{(\vec{k})} := \frac{1}{\langle \vec{k}, \vec{n} \rangle + 1} \binom{\langle \vec{k}, \vec{n} \rangle + 1}{\vec{n}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m k_i n_i + 1} \binom{\sum_{i=1}^m k_i n_i + 1}{n_1, n_2, \dots, n_m, 1 + \sum_{i=1}^m (k_i - 1)n_i} \quad (43)$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^m ist und rechts ein Multinomialkoeffizient steht.

$C_{\vec{n}}^{(\vec{k})}$ heißt "höhere Catalan-Zahl".

Diese Zahlen sind eine weitere Verallgemeinerung der Catalan-Zahlen k -ten Grades in Analogie zur Beziehung (35) (siehe Kapitel 6.1).

Weitere Informationen über diese Zahlen sind zu finden bei CHU [18], SANDS [14] und ERDÉLYI und ETHERINGTON [17].

In unserem Beispiel der Zerlegungen des Sechsecks haben wir:

Zerlegung in	\vec{n}	\vec{k}	$C_{\vec{n}}^{(\vec{k})}$
1 Sechseck	(0,0,0,1)	(2,3,4,5)	$\frac{1}{5+1} \binom{5+1}{0,0,0,1,5} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6!}{0! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 1! \cdot 5!} = 1$
1 Fünfeck und 1 Dreieck	(1,0,1,0)	(2,3,4,5)	$\frac{1}{6+1} \binom{6+1}{1,0,1,0,5} = \frac{1}{7} \cdot \frac{7!}{1! \cdot 0! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 5!} = 6$
1 Viereck und 2 Dreiecke	(2,1,0,0)	(2,3,4,5)	$\frac{1}{7+1} \binom{7+1}{2,1,0,0,5} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8!}{2! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 5!} = 21$
2 Vierecke	(0,2,0,0)	(2,3,4,5)	$\frac{1}{6+1} \binom{6+1}{0,2,0,0,5} = \frac{1}{7} \cdot \frac{7!}{0! \cdot 2! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 5!} = 3$
4 Dreiecke	(4,0,0,0)	(2,3,4,5)	$\frac{1}{8+1} \binom{8+1}{4,0,0,0,5} = \frac{1}{9} \cdot \frac{9!}{4! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 5!} = 14$

Um nun auf die Anzahl Z_{m+2} aller möglichen Zerlegungen eines $(m+2)$ -Ecks zu kommen, müssen wir nur über die höheren Catalan-Zahlen bezüglich dieses $(m+2)$ -Ecks aufsummieren:

$$Z_{m+2} := \sum_{\sum_{i=1}^m (k_i-1)n_i=m} C_{\vec{n}}^{(\vec{k})} \quad (44)$$

Wir erhalten folgende Zahlenfolge (siehe [2], Nr. 1163):

m+2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Z_{m+2}	1	3	11	45	197	903	4279	20793	103049	518859	2646723	13648869

Diese Zahlen sind gleichzeitig auch Antwort auf das verallgemeinerte Klammerproblem das SCHRÖDER [20] schon 1870 behandelt hat.

Wir können Z_{m+2} durch folgende einfache Rekursionsformel auch schneller berechnen (siehe COMTET [19]):

$$Z_{m+2} = \frac{(6m-3)Z_{m+1} - (m-2)Z_m}{m+1} \quad (45)$$

8.3 Mehrdimensionale Verallgemeinerung der Catalan-Zahlen

Eine weitere Verallgemeinerung geht von der Frage nach der Anzahl der Gitterwege in einem ebenen Gitter aus. Gehen wir zu mehrdimensionalen Gittern über, wird unsere Vorstellungskraft doch schnell überstrapaziert. Deshalb betrachten wir vorerst nur den Fall eines dreidimensionalen Gitters.

Wir wissen, daß die Anzahl der minimalen Gitterwege von $(0,0,0)$ zum Punkt (x,y,z) des dreidimensionalen Gitters durch den Trinomialkoeffizienten

$$\binom{x+y+z}{x,y,z} = \frac{(x+y+z)!}{x! \cdot y! \cdot z!}$$

(für $x, y, z \in \mathbb{N}_0$) gegeben ist.

Analog zum zweidimensionalen Fall (siehe 2.3) wollen wir auf einem minimalen Gitterweg vom Punkt $(0,0,0)$ zum Endpunkt (n,n,n) gelangen und dabei die beiden Ebenen $y=x$ und $y=z$ nicht überschreiten.

Der Gitterweg liegt also innerhalb einer Pyramide, deren Spitze der Endpunkt (n, n, n) bildet und deren Grundfläche ein Dreieck mit den Ecken $(0, 0, 0)$, $(n, 0, 0)$, $(n, n, 0)$ ist. Es gibt

$$\frac{1}{\binom{n+1}{1} \binom{n+2}{2}} \cdot \binom{3n}{n, n, n}$$

solcher minimaler Gitterwege.

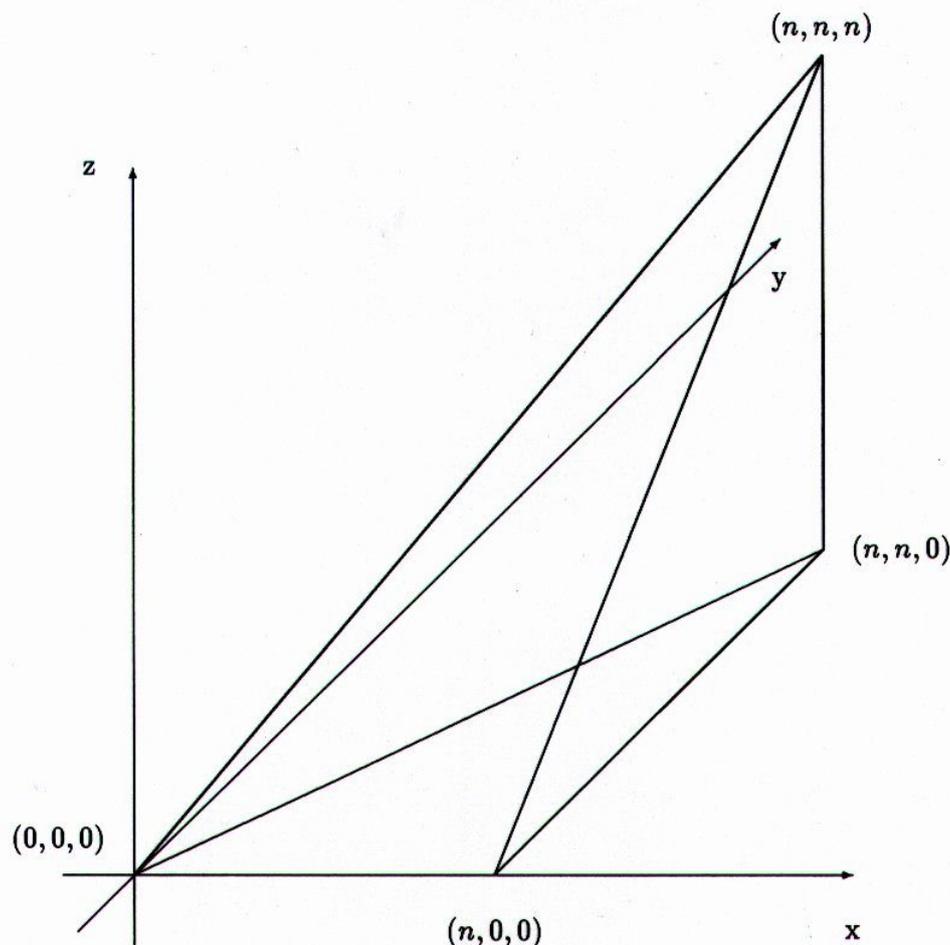


Abbildung 58: Pyramide innerhalb deren die minimalen Gitterwege verlaufen

Im allgemeinen m -dimensionalen Fall ergibt sich die Anzahl der minimalen Gitterwege vom Punkt $(0, 0, \dots, 0)$ nach (n, n, \dots, n) , welche die Hyperebenen $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$, ..., $x_{m-1} = x_m$ nicht überschreiten:

$${}^m C_n := \frac{1}{\binom{n+1}{1} \binom{n+2}{2} \cdots \binom{n+(m-1)}{m-1}} \cdot \binom{mn}{n, n, \dots, n} \quad (46)$$

${}^m C_n$ heißt "n-te m-dimensionale Catalan-Zahl" und ist offensichtlich eine Verallgemeinerung von C_n .

Explizit sehen diese Folgen $({}^m C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgendermaßen aus:

$n =$	1	2	3	4	5	6	7
${}^0 C_n$	1	1	1	1	1	1	1
${}^2 C_n$	1	2	5	14	42	132	429
${}^3 C_n$	1	5	42	462	6006	87516	1385670
${}^4 C_n$	1	14	462	24024	1662804	140229804	13672405890
${}^5 C_n$	1	42	6006	1662804	701149020	396499770810	278607172289160
${}^6 C_n$	1	132	87516	140229804	396499770810	1671643033734960	9490348077234178440
${}^7 C_n$	1	429	1385670	13672405890	278607172289160	9490348077234178440	475073684264389879228560

Die Symmetrie dieser Übersicht fällt auf. Beim genaueren Betrachten der Formel für die m -dimensionalen Catalan-Zahlen erkennt man leicht, daß ${}^m C_n = {}^n C_m$ gilt.

Dieses kombinatorische Problem ist ein Spezialfall des Problems, das MACMAHON in [21] (S. 131-134) bereits behandelt hat.

8.4 q -Catalan-Zahlen

Nun wollen wir noch eine ganz andere Verallgemeinerung der Catalan-Zahlen kennenlernen: Die q -Catalan-Zahlen.

Dazu müssen wir allerdings erst noch einige Vorbemerkungen und Definitionen machen.

Ausgehen wollen wir von der sogenannten "Gaußschen Fakultät", die durch Polynome in einer Unbestimmten q dargestellt wird:

$$n!! := \frac{(q-1)(q^2-1)(q^3-1) \cdot \dots \cdot (q^n-1)}{(q-1)^n} = 1 \cdot (1+q) \cdot (1+q+q^2) \cdot \dots \cdot (1+q+q^2+\dots+q^{n-1}) \quad (47)$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$ und $0!! := 1$.

Im Grenzfall $q \rightarrow 1$ ergibt sich die uns wohlbekannte Fakultät von n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$

Mit dieser Gaußschen Fakultät läßt sich nun auch der "Gaußsche Binomialkoeffizient" (siehe PÓLYA und ALEXANDERSON [22]) analog zu dem uns bekannten Binomialkoeffizienten

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ definieren:

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] := \frac{n!!}{k!! \cdot (n-k)!!} = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1) \cdot \dots \cdot (q^{n-k+1}-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1) \cdot \dots \cdot (q^k-1)} \quad (48)$$

wobei $k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$.

Außerdem brauchen wir noch die sogenannte " q -Notation" einer natürlichen Zahl:

$$[n] := \frac{q^n-1}{q-1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1} \quad (49)$$

Somit sind wir nun in der Lage die Beziehung (15) für die Catalan-Zahlen (siehe Kapitel 4) analog zu verallgemeinern:

$$\boxed{{}_{eq}C_n := \frac{1}{[n+1]} \cdot \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} = \frac{(q^{2n}-1)(q^{2n-1}-1) \cdot \dots \cdot (q^{n+2}-1)}{(q^2-1)(q^3-1) \cdot \dots \cdot (q^n-1)}} \quad (50)$$

${}_{eq}C_n$ heißt ” **n -te explizite q -Catalan-Zahl**”.

Die q -Catalan-Zahlen sind ganzzahlige Polynome in einer Unbestimmten q . Für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ erhalten wir:

$${}_{eq}C_0 = 1$$

$${}_{eq}C_1 = 1$$

$${}_{eq}C_2 = 1 + q^2$$

$${}_{eq}C_3 = 1 + q^2 + q^3 + q^4 + q^6$$

$${}_{eq}C_4 = 1 + q^2 + q^3 + 2q^4 + q^5 + 2q^6 + q^7 + 2q^8 + q^9 + q^{10} + q^{12}$$

Natürlich lassen sich diese wieder analog zu (34) zu ”**expliziten q -Catalan-Zahlen k -ten Grades**” weiter verallgemeinern.

Diese sind dann gegeben durch:

$$\boxed{{}_{eq}C_n^{(k)} := \frac{1}{[kn+1]} \cdot \begin{bmatrix} (k+1)n \\ n \end{bmatrix} = \frac{(q^{(k+1)n}-1)(q^{(k+1)n-1}-1) \cdot \dots \cdot (q^{kn+2}-1)}{(q^2-1)(q^3-1) \cdot \dots \cdot (q^n-1)}} \quad (51)$$

Die expliziten q -Catalan-Zahlen sind das offensichtlichste q -Analogon der Catalan-Zahlen. Es gibt auch noch die Möglichkeit, das q -Analogon zur Rekursionsformel der Catalan-Zahlen (12) zu bilden (siehe [23]):

$$\boxed{{}_{zq}C_n := \sum_{l=0}^{n-1} {}_{zq}C_l \cdot {}_{zq}C_{n-l-1} \cdot q^l} \quad (52)$$

mit ${}_{zq}C_0 := 1$.

${}_{zq}C_n$ heißt ” **n -te Carlitzsche q -Catalan-Zahl**” (benannt nach dem Mathematiker L. CARLITZ, der diese Zahlen näher untersuchte).

Anders als man vielleicht im ersten Moment vermuten würde sind dies tatsächlich andere Polynome in q als die expliziten q -Catalan-Zahlen. Also sind (50) und (52) im Gegensatz

zu (12) und (15) nicht äquivalent. Eine einfache direkte Berechnungsformel für ${}_{zq}C_n$ ist nicht bekannt.

Die ersten 5 Carlitzschen q -Catalan-Zahlen sind:

$${}_{zq}C_0 = 1$$

$${}_{zq}C_1 = 1$$

$${}_{zq}C_2 = 1 + q$$

$${}_{zq}C_3 = 1 + 2q + q^2 + q^3$$

$${}_{zq}C_4 = 1 + 3q + 3q^2 + 3q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6$$

Mehr Informationen über q -Catalan-Zahlen und ihre Bedeutung findet der interessierte Leser bei FÜRLINGER und HOFBAUER [23], CARLITZ und RIORDAN [24] und bei CARLITZ und SCOVILLE [25].

9 Catalan-Zahlen in der Schule

Zum Abschluß meiner Arbeit möchte ich noch auf die Bedeutung der Catalan-Zahlen in Bezug auf den Mathematikunterricht in der Schule eingehen.

Die Catalan-Zahlen kommen im heutigen Mathematikunterricht der Schule praktisch nicht vor. Selbst in der gymnasialen Oberstufe, in der Kombinatorik gelehrt wird, werden sie übergangen.

Überhaupt steht die Kombinatorik in der Schulmathematik doch mehr im Hintergrund, lediglich in der Oberstufe dient sie als Zulieferer für die Stochastik. Dort wird sie dann als ungewöhnlich schwer empfunden, obwohl oft nur einfache Grundkenntnisse gebraucht werden.

Gerade die für die Stochastik benötigten Abzählprobleme, wie sie auch bei der Diskussion der Catalan-Zahlen auftauchen, bereiten den Schülern oft Schwierigkeiten, weil sie sich nicht so ganz sicher sind, ob sie auch wirklich alle Möglichkeiten berücksichtigt haben oder etwa sogar welche unbemerkt mehrfach gezählt haben.

Natürlich sind Abzählprobleme unter Umständen knifflig und nicht ganz einfach zu lösen, da man sich über die vorliegende Situation der Fragestellung bis Detail klar werden muß. Aber gerade dieses erfordert eben Übung, bis man schließlich bemerkt, daß es mit wenigen Grundlagen gelingt, selbst kombinatorische Probleme zu lösen, die anfangs völlig unüberschaubar anmuteten.

Nun ist eine Sache zu wissen, wieviele Möglichkeiten es für eine bestimmte Angelegenheit gibt, eine andere gar nicht so leichte Sache ist es allerdings, auch tatsächlich alle Möglichkeiten anzugeben. Solche Aufzählprobleme begegnen uns auch im täglichen Leben. Der Einstieg in die Thematik der Catalan-Zahl geschieht am leichtesten gerade eben mit der Lösung eines solchen Problems, der Auflistung aller möglichen Zerlegungen eines Polygons in Dreiecke.

Ein weiteres Argument für mehr Kombinatorik im Schulunterricht, das auch HILTON und PEDERSEN [26] anführen, ist die Vielzahl von Begriffen aus den unterschiedlichsten Teilgebieten der Mathematik, die die Kombinatorik verwendet und somit die Einheit der Mathematik auf besondere Art und Weise demonstriert.

Ein Hauptanliegen meiner vorliegenden Arbeit ist es, durch die vielen unterschiedlichsten Interpretationen der Catalan-Zahlen aus den verschiedensten Wissensgebieten nicht nur der Mathematik aufzuzeigen, daß es oft Verbindungen und engere Zusammenhänge zwischen auf den ersten Blick völlig unterschiedlichen Problemen gibt, was im Falle der Catalan-Zahlen sogar so weit geht, daß eine Fülle von Fragestellungen alle auf ein und dieselbe Antwort hinauslaufen.

Gerade dieses würde Schüler nicht nur vor Erstaunen größtes Interesse bereiten, sondern auch eine Art zu Denken fördern, die mehr auf Zusammenhänge und Vernetzung von einzelnen Aufgaben bzw. Problemen abzielt. Ein Ziel, das in unserer immer komplexer werdenden Welt von größter Notwendigkeit für alle Bereiche unseres Leben ist.

Am Beispiel der planaren Reimschemata haben wir gesehen, wie fächerübergreifend die Thematik der Catalan-Zahlen ist. Solche Querverbindungen zu anderen Fächern ergeben sich auch für andere Themen aus der Kombinatorik (Fibonacci-Zahlenfolge, Vierfarbenproblem, Binomialkoeffizienten,).

Anhand der Catalan-Zahlen (und anderen Beispielen aus der Kombinatorik) läßt sich aber auch der enge Zusammenhang einzelner mathematischer Teildisziplinen demonstrieren: Geometrie, Algebra, Analysis, Informatik, Graphentheorie, Spieltheorie, Kombinatorik und Unterhaltungsmathematik finden nicht nur eine gemeinsame Anwendung, sondern sogar ein enges Netz von "Brücken" zu allen anderen Teilgebieten.

Solche Querverbindungen werden nicht zuletzt erst durch Verallgemeinerung einer speziellen Frage deutlich. Geschickte Verallgemeinerung rückt ein Problem oft in ein ganz anderes, durchschaubareres Licht. Eine Erfahrung, die auch jedem Schüler sehr nützlich sein kann.

Ein weiteres Hauptanliegen meiner Arbeit liegt darin, die Möglichkeit von Verallgemeinerungen anhand der Catalan-Zahlen in möglichst verständlicher einfacher Weise aufzuzeigen und dabei eine neue Art mathematischer Denkweise offenzulegen. Eine Denkweise die in einfacher Form auch schon ein Schüler erfahren kann.

Natürlich sind die Beweise und auch die mathematischen Umformungen dieser Arbeit zum großen Teil nicht für Schüler geeignet. Aber doch sind viele bijektive Beziehungen anhand von Zeichnungen leicht verständlich, was es durchaus möglich erscheinen läßt, die Zusammenhänge der verschiedenen Interpretationen der Catalan-Zahlen und ihrer Verallgemeinerungen zumindest fortgeschrittenen Schülern zuzumuten. Noch dazu wo es sich anbietet, die verschiedenen Möglichkeiten der einzelnen Fragestellungen spielerisch und zeichnerisch herauszufinden, was zu eigener Initiative herausfordert und Forschergeist weckt.

Das Lösen kombinatorischer Probleme spielt für Schüler eine große Rolle zum Erlernen neuer Denkprozesse.

Zusammenfassend bin ich der Auffassung, daß durch Berücksichtigung der Kombinatorik auch schon in der Unterstufe, wo einfache Abzähl-, Auswahl-, Aufzähl- oder Ordnungsprobleme gelöst werden könnten, und in der Mittelstufe, wo z.B. der Zusammenhang zwischen Kombinatorik und Algebra und auch anderen Gebieten gezeigt werden könnte, die Kombinatorik zu einem festen Bestandteil der Schulmathematik würde, was vielen Oberstufenschülern die "Angst" und die Schwierigkeiten, die sie oft mit der Kombinatorik verbinden, nehmen würde. In der Oberstufe wäre es dann auch möglich, genauso wie oft auch schon die Fibonacci-Zahlenfolge, die Catalan-Zahlenfolge genauer zu behandeln, um den oft recht "trockenen" Stoff der Mathematik etwas abwechslungsreicher zu gestalten.

Literatur

- [1] H. DRRIE: *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover, New York, 1965, Problem Nr. 7.
- [2] N. J. A. SLOANE: *A Handbook of Integer Sequences*, New York, 1973
- [3] E. CATALAN: *Note sur une quation aux diffrences finies*, Journal de Mathmatiques pures et appliques de Liouville, 3 (1838), 508-516.
- [4] M. J. BINET: *Rflexions sur le problme de dterminer le nombre de manires dont une figure rectiligne peut tre partage en triangles au moyen de ses diagonales*, Journal de Mathmatiques pures et appliques de Liouville, 4 (1839), 79-91.
- [5] E. CATALAN: *Solution nouvelle de cette question: un polygone tant donn, de combien de manires peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales*, Journal de Mathmatiques pures et appliques de Liouville, 4 (1839), 91-94.
- [6] J. H. VAN LINT: *Combinatorial Theory Seminar*, Lecture Notes in Mathematics 382, Eindhoven, 1974, 21-27.
- [7] C. O. OAKLEY, R. J. WISNER: *Flexagons*, Amer. Math. Monthly 64 (1957), 143-154
- [8] E. J. BARBEAU: *Polynomials*, New York, 1989, 260-262.
- [9] M. GARDNER: *Mathematical Games: Catalan numbers: an integer sequence that materializes in unexpected places*, Scientific American, Juni 1976, Juli 1976.
- [10] H. W. BECKER: *Problem 4277 (solution)*, Amer. Math. Monthly 56 (1949), 697-699.
- [11] N. FUSS: *Solutio quaestionis, quot modis polygonum n laterum in polygona m laterum per diagonales resolvi queat*, Nova Acta Acad. Sci. Imperialis Petropolitanae 9 (1791).
- [12] J. A. GRUNERT: *Über die Bestimmung der Anzahl der verschiedenen Arten, auf welche sich ein n -Eck durch Diagonalen in lauter m -Ecke zerlegen läßt*, Archiv Math. Phys. Grunert 1 (1841), 192-203.
- [13] J. C. BINZ: *Minimale Gitterwege mit Nebenbedingungen*, Elemente der Mathematik 32 (1977), 71-72.
- [14] A. D. SANDS: *On generalised Catalan numbers*, Discrete Mathematics 21 (1978), 219-221.
- [15] D. A. KLARNER: *Correspondences between plane trees and binary sequences*, Journal of Combinatorial Theory 9 (1970), 401-411.
- [16] G. PÓLYA, G. SZEGÖ: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin, 1925, 125 und 301.
- [17] A. ERDÉLYI, I. H. M. ETHERINGTON: *Some problems of non-associative combinations II*, Edinburgh Math. Notes 32 (1940), 7-12.

- [18] W. CHU: *A new combinatorial interpretation for generalized Catalan numbers*, Discrete Mathematics 65 (1987), 91-94.
- [19] L. COMTET: *Advanced Combinatorics*, Dordrecht (Holland), 1974, 56-57.
- [20] SCHRÖDER: *Vier kombinatorische Probleme*, Z. für M. Phys. 15 (1870), 361-376.
- [21] M. P. A. MACMAHON: *Combinatory Analysis*, New York , 1960; im Original 2 Bände, Cambridge, 1915, 1916.
- [22] G. PÓLYA, G. L. ALEXANDERSON: *Gaussian Binomial Coefficients*, Elemente der Mathematik (1971), 102-109.
- [23] J. FÜRLINGER, J. HOFBAUER: *q-Catalan Numbers*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 40 (1985), 248-264.
- [24] L. CARLITZ, J. RIORDAN: *Two element lattice permutation numbers and their q-generalization*, Duke J. Math. 31 (1964), 371-388.
- [25] L. CARLITZ, R. SCOVILLE: *A note on weighted sequences*, Fibonacci Quarterly 13 (1975), 303-306.
- [26] P. J. HILTON, J. PEDERSEN: *Catalan-Zahlen und Wege in einem ganzzahligen Gitter*, Elemente der Mathematik 48 (1993), 45-60.

Ausführliche Literatursammlungen zum Thema Catalan-Zahlen:

- [27] W. G. BROWN: *Historical note on a recurrent combinatorial problem*, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 973-977.
- [28] R. ALTER: *Some remarks and results on Catalan Numbers*, Proceedings of the 2nd Louisiana Conference of Combinatorics, Graph Theory and Comp. (1971), 109-132.
- [29] P. HILTON, J. PEDERSEN: *Catalan numbers and their uses*, Handbook of Applicable Mathematics, Chichester (1990), 93-115.
- [30] H. GOULD: *Research bibliography of two special number sequences*, Mathematica Monongaliae 12 (1971).

Ich erkläre hiermit, daß ich diese Arbeit selbständig angefertigt habe und nur die im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Jürgen Schmidhauer

Erlangen, im Februar 1996